Corrigés

À VOUS DE JOUER 1

1. Oui, nous sommes dans un problème plan. Le plan d'étude est (Oxy).

2. La pièce 3 est soumise à 3 forces :

- la force exercée par la pièce 2, en C, qu'on notera $\overrightarrow{C_{2\to3}}$
- la force exercée par la pièce 4, en D, qu'on notera $\overrightarrow{D_{4\to3}}$
- la force exercée par la gravité sur la pièce 2, en G, qu'on note $\vec{P}$

3. Pour la force en C, on peut graphiquement déterminer que $\overrightarrow{C_{3\to2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, selon le principe d'action-réaction, on peut déterminer l'expression vectorielle de $\overrightarrow{C_{2\to3}}$ qui est :

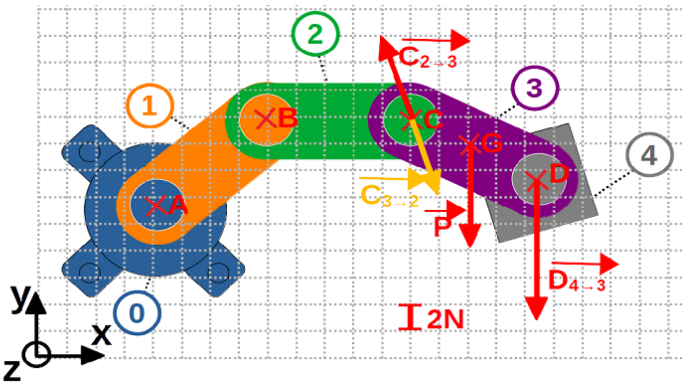
$$\overrightarrow{C_{2\to3}} = -\overrightarrow{C_{3\to2}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -(-6) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour la force en D, on peut la déterminer graphiquement $\overrightarrow{D_{4\to3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$

Enfin, pour la force en G, on peut calculer sa norme $\left\| \vec{P} \right\| \approx m.g = 0,8 \times 10 = 8N$. Cette force étant verticale et vers le bas, son expression vectorielle est :

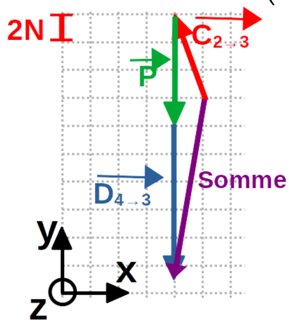
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.



5. On met bout à bout les 3 flèches, ce qui donne un vecteur somme valant :

$$\overrightarrow{C_{2\to3}} + \overrightarrow{D_{4\to3}} + \vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$



6. Par le calcul, on obtient :

$$\overrightarrow{C_{2\to3}} + \overrightarrow{D_{4\to3}} + \vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0+0 \\ 6-10-8 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui vérifie la valeur obtenue par méthode graphique.

À VOUS DE JOUER 2

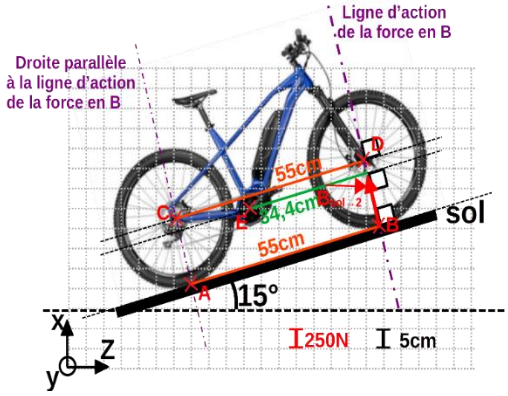
1. Environ 680N par lecture graphique

2. $\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}} = \begin{pmatrix} 660 \\ 0 \\ -175 \end{pmatrix}$

Dans la suite, on notera le moment de $\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}$ ainsi : $M_B\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}$. La flèche du vecteur au-dessus du « M » de « moment » n'étant pas nécessaire, car le moment n'est produit qu'autour de l'axe y (problème plan).

3. En son point d'application, le moment d'une force est toujours nul, donc $M_B\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}} = 0Nm$.

4. Pour déterminer le moment de $\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}$ en D, il faut commencer par tracer la ligne d'action de la force $\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}$.



On se rend alors compte que le point D se trouve sur cette ligne d'action : cela implique que la distance entre le point D et la ligne d'action est nulle. Par conséquent :

$$M_D\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}} = \pm\left\|M_D\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}\right\| \times d \approx \pm 680 \times 0 = 0Nm$$

On peut déduire de cette réponse la propriété suivante : le moment d'une force est nul en tout point se trouvant sur sa ligne d'action.

5. La distance entre la ligne d'action de $\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}$ et le point A vaut environ 55cm. Par conséquent :

$$M_A\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}} = \pm\left\|M_A\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}\right\| \times d \approx \pm 680 \times 0,55 = \pm 374Nm$$

Comme la force $\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}$ est dirigée vers le haut, on en déduit qu'elle tendra à faire tourner le solide dans le sens trigonométrique autour du point A, et donc que le moment sera positif. Au final, on a donc :

$$M_A\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}} = +374Nm$$

6. La distance entre la ligne d'action de $\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}$ et le point C vaut environ 55cm. Par conséquent :

$$M_C\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}} = \pm\left\|M_C\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}\right\| \times d \approx \pm 680 \times 0,55 = \pm 374Nm$$

Comme la force $\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}$ est dirigée vers le haut, on en déduit qu'elle tendra à faire tourner le solide dans le sens trigonométrique autour du point C, et donc que le moment sera positif. Au final, on a donc :

$$M_C\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}} = +374Nm$$

On remarque que les moments en A et en C sont identiques. Cela est dû au fait qu'ils sont à la même distance, et du même côté, de la ligne d'action de $\overrightarrow{B_{sol\rightarrow roue}}$.
On peut déduire de ces deux réponses la propriété suivante : le moment d'une force exprimée en deux points sera le même, si ces deux points se trouvent à égale distance et du même côté de la droite d'action de la force.

7. La distance entre la ligne d'action de $\overrightarrow{B_{sol \to roue}}$ et le point E vaut environ 34,5cm. Par conséquent :

$$M_E\overrightarrow{B_{sol \to roue}} = \pm \left\| M_E\overrightarrow{B_{sol \to roue}} \right\| \times d \approx \pm 680 \times 0,345 = \pm 234,6Nm$$

Comme la force $\overrightarrow{B_{sol \to roue}}$ est dirigée vers le haut, on en déduit qu'elle tendra à faire tourner le solide dans le sens trigonométrique autour du point E, et donc que le moment sera positif. Au final, on a donc :

$$M_E\overrightarrow{B_{sol \to roue}} = +234,6Nm$$

8. On remarque que :

$M_A\overrightarrow{B_{sol \to roue}} = +374Nm$ > $M_E\overrightarrow{B_{sol \to roue}} = +234,6Nm$ > $M_B\overrightarrow{B_{sol \to roue}} = 0Nm$

On peut en déduire la propriété suivante, qui est due à la relation du bras de levier : plus un point est éloigné de la ligne d'action d'une force, plus le moment de cette force exprimé en ce point sera important.

À VOUS DE JOUER 3

1. Une rapide application de la formule $\left\| \overrightarrow{P} \right\| = m.g \approx 0,150 \times 10 = 1,5N$ nous permet de calculer la norme de la force de pesanteur auquel le solide 6 est soumis. Elle s'applique en G6, qui est le centre de gravité du solide 6.

La liaison pivot en H nous donne une force $\overrightarrow{H_{0 \to 6}}$. Pour cette force, comme nous avons des indications sur la force $\overrightarrow{H_{6 \to 0}}$ (point d'application, direction, sens et norme), on peut, d'après le principe d'action-réaction, déduire toutes ses caractéristiques.

Enfin, la liaison pivot en J nous donne une force $\overrightarrow{J_{2 \to 6}}$. Nous n'avons aucune information sur elle, hormis son point d'application.

Finalement, le bilan des forces donne :

Nom de la force	Point d'application	Direction	Sens	Norme (N)
$\overrightarrow{P}$	G6	verticale	Vers le bas	1,5
$\overrightarrow{H_{0 \to 6}}$	H	Droite (d)	Vers le bas	12
$\overrightarrow{J_{2 \to 6}}$	J			

2. Une rapide application de la formule $\left\| \overrightarrow{P} \right\| = m.g \approx 0,270 \times 10 = 2,7N$ nous permet de calculer la norme de la force de pesanteur auquel le solide 2 est soumis. Elle s'applique en G2, qui est le centre de gravité du solide 2.

Les liaisons pivots en J et I nous donnent deux forces $\overrightarrow{J_{6 \to 2}}$ et $\overrightarrow{I_{4 \to 2}}$. Nous n'avons aucune information sur elles, hormis leurs points d'application.

Enfin, la force liée à la résistance à la pression de la pièce P est indiquée sur le schéma, ce qui permet de connaître sa direction et son sens. Sa norme est donnée dans l'énoncé, elle vaut 23N.

Finalement, le bilan des forces donne :

Nom de la force	Point d'application	Direction	Sens	Norme (N)
$\overrightarrow{P}$	G2	verticale	Vers le bas	2,7
$\overrightarrow{J_{6 \to 2}}$	J			
$\overrightarrow{I_{4 \to 2}}$	I			
$\overrightarrow{B_{P \to 6}}$	B	horizontale	Vers la droite	23

À VOUS DE JOUER 4

1. Les forces en A et B seront vers le haut, car elles représentent la résistance du sol à l'enfoncement de la voiture.

2. La voiture est soumise à trois forces : la pesanteur $\overrightarrow{P}$ au niveau de son centre de gravité G, $\overrightarrow{A_{sol \longrightarrow\ voiture}}$ au niveau de la liaison linéaire rectiligne de centre A (roue avant) et $\overrightarrow{B_{sol \longrightarrow\ voiture}}$ au niveau de la liaison linéaire rectiligne de centre B (roue arrière).

Une rapide application de la formule $\|\vec{P}\| = m.g \approx 890 \times 10 = 8900\,N$ nous permet de calculer la norme de la force de pesanteur à laquelle la voiture est soumise. Elle s'applique en G.

Enfin, nous savons aussi que toutes les forces sont de direction verticale, et nous connaissons leurs sens.

Nom de la force	Point d'application	Direction	Sens	Norme (N)
$\vec{P}$	G	verticale	Vers le bas	8900
$\overrightarrow{A_{sol \to voiture}}$	A	verticale	Vers le haut	
$\overrightarrow{B_{sol \to voiture}}$	B	verticale	Vers le haut	

3. D'un point de vue vectoriel, nous avons pour le moment :

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8900 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{A_{sol \longrightarrow\ voiture}} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_A \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{B_{sol \longrightarrow\ voiture}} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

On sait aussi que y_A et y_B sont positives (sens des forces vers le haut).

L'application du PFS sur les forces nous donne : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{P} + \overrightarrow{A_{sol \longrightarrow\ voiture}} + \overrightarrow{B_{sol \longrightarrow\ voiture}} = \overrightarrow{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -8900 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

On obtient ainsi une seule équation sur y : $-8900 + y_A + y_B = 0$

Comme il y a deux inconnues, pour une seule équation, on va devoir utiliser l'équation des moments. On décide d'exprimer les moments en B, car c'est l'une des forces pour lesquelles nous avons le moins de données (on pourrait aussi bien les exprimer en A) : $\sum M_B \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$

$$\Longleftrightarrow M_B \overrightarrow{P} + M_B \overrightarrow{A_{sol \longrightarrow\ voiture}} + M_B \overrightarrow{B_{sol \longrightarrow\ voiture}} = 0$$

On exprime les moments en B :

$M_B \overrightarrow{P} = \pm \|P\| \times d2 \approx \pm 8900 \times 1,6 \approx +14240 Nm$, le signe final est positif car le poids, qui est vers le bas, tend à faire tourner la voiture dans le sens trigonométrique par rapport au point B.

$M_B \overrightarrow{A_{sol \longrightarrow\ voiture}} = \pm \|A_{sol \longrightarrow\ voiture}\| \times (d1 + d2) = \pm y_A \times 2,4 = -2,4.y_A$, le signe final est négatif car la résistance du sol, qui est vers le haut, tend à faire tourner la voiture dans le sens anti-trigonométrique par rapport au point B.

$M_B \overrightarrow{B_{sol \to voiture}} = 0$ car le moment d'une force est nul en tout point se trouvant sur sa ligne d'action.

On obtient l'équation : $14240 - 2,4\,y_A + 0 = 0$.

Nous avons maintenant 2 équations :

- $-8900 + y_A + y_B = 0$
- $14240 - 2,4\,y_A + 0 = 0$

La 2ème équation donne :

$$-2,4.y_A = -14240 \Rightarrow y_A = \frac{-14240}{-2,4} \approx 5930N$$

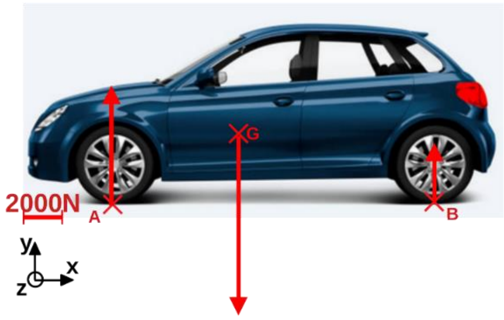
La 1ère équation donne :

$$-8900+5930+y_B=0 \Rightarrow y_B=8900-5930 \approx 2970\,N$$

On peut compléter le tableau bilan des forces :

Nom de la force	Point d'application	Direction	Sens	Norme (N)
$\vec{P}$	G	verticale	Vers le bas	8900
$\overrightarrow{A_{sol\rightarrow voiture}}$	A	verticale	Vers le haut	5930
$\overrightarrow{B_{sol\rightarrow voiture}}$	B	verticale	Vers le haut	2970

4.



À VOUS DE JOUER 5

1. 2. L'ensemble {4, caisse} est soumis à deux forces : son poids $\vec{P}$ et une force de contact $\overrightarrow{F_{3\longrightarrow\{4,caisse\}}}$ au niveau de la liaison pivot de centre F.

La pesanteur impose une force en G, verticale et vers le bas, dont la norme vaut :

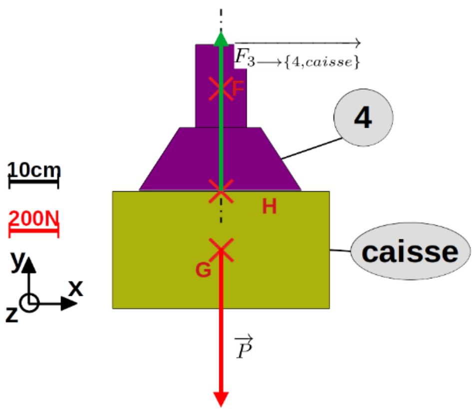
$$\left\|\vec{P}\right\| = m.g \approx 65 \times 10 = 650N$$

On la connaît donc entièrement sans faire appel au PFS.

Comme on a un solide soumis à 2 forces, d'après le PFS on peut en déduire que la force $\overrightarrow{F_{3\longrightarrow\{4,caisse\}}}$ est de même direction, de sens opposé et de même norme que $\vec{P}$.

Nom de la force	Point d'application	Direction	Sens	Norme (N)
$\vec{P}$	G	verticale	Vers le bas	650
$\overrightarrow{F_{3\rightarrow\{4,\ caisse\}}}$	F	verticale	Vers le haut	650

3.



À VOUS DE JOUER 6

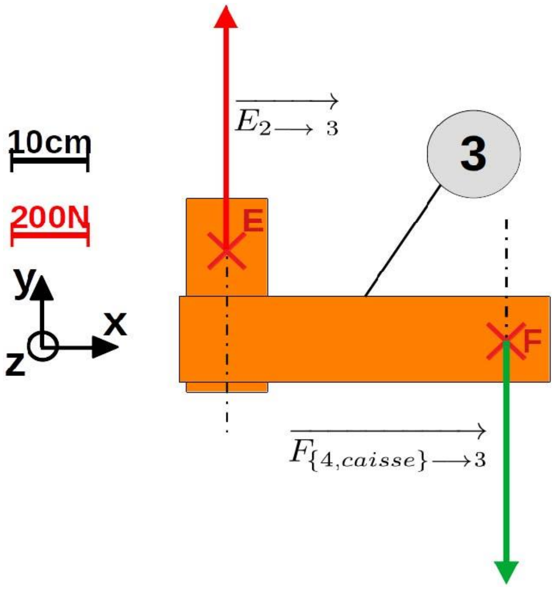
1. 2. Le solide 3 est soumis à deux forces de contact : $\overrightarrow{F_{\{4,caisse\}\rightarrow 3}}$ au niveau de la liaison pivot de centre F, et $\overrightarrow{E_{2\longrightarrow 3}}$ au niveau de la liaison pivot de centre E.

D'après le principe d'action-réaction, on peut en déduire les caractéristiques complètes de $\overrightarrow{F_{\{4,caisse\}\rightarrow 3}}$ car cette force est de même direction (verticale), de sens opposé (vers le bas) et de même norme que $\overrightarrow{F_{3\longrightarrow\{4,caisse\}}}$ (650N) qu'on a déterminée précédemment.

Ensuite, comme on a un solide soumis à 2 forces, d'après le PFS on peut en déduire que la force $\overrightarrow{E_{2\longrightarrow 3}}$ est de même direction, de sens opposé et de même norme que $\overrightarrow{F_{\{4,caisse\}\rightarrow 3}}$.

Nom de la force	Point d'application	Direction	Sens	Norme (N)
$\overrightarrow{F_{\{4,\ caisse\}\rightarrow 3}}$	F	verticale	Vers le bas	650
$\overrightarrow{E_{2\rightarrow 3}}$	E	verticale	Vers le haut	650

3.



À VOUS DE JOUER 7

1. Le solide 2 est soumis à trois forces de contact : $\overrightarrow{E_{3\longrightarrow 2}}$ au niveau de la liaison pivot de centre E, $\overrightarrow{B_{1\longrightarrow 2}}$ au niveau de la liaison pivot-glissant de centre B et $\overrightarrow{D_{5\longrightarrow 2}}$ au niveau de l'attache du câble en D.

D'après le principe d'action-réaction, on peut en déduire les caractéristiques complètes de $\overrightarrow{E_{3\longrightarrow 2}}$, car cette force est de même direction (verticale), de sens opposé (vers le bas) et de même norme que $\overrightarrow{E_{2\longrightarrow 3}}$ (650N) qu'on a déterminée précédemment.

Nom de la force	Point d'application	Direction	Sens	Norme (N)
$\overrightarrow{E_{3\rightarrow 2}}$	E	verticale	Vers le bas	650
$\overrightarrow{B_{1\rightarrow 2}}$	B			
$\overrightarrow{D_{5\rightarrow 2}}$	D			

2. En appliquant le PFS sur la pièce 5, on en déduit, comme cette pièce n'est soumise qu'à 2 forces ($\overrightarrow{D_{2\longrightarrow 5}}$ et $\overrightarrow{C_{1\longrightarrow 5}}$), que la direction de ces 2 forces est la droite (CD), qui relie leurs 2 points d'applications. D'après le principe d'action-réaction, cela signifie que la force $\overrightarrow{D_{5\longrightarrow 2}}$ a aussi pour direction la droite (CD).

3. D'un point de vue vectoriel, nous avons pour le moment :

$$\overrightarrow{E_{3\longrightarrow 2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -650 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{B_{1\longrightarrow 2}} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{D_{5\longrightarrow 2}} = \begin{pmatrix} x_D = -\frac{\sqrt(3)}{2}k \\ y_D = \frac{1}{2}k \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'application du PFS sur les forces nous donne : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{E_{3\longrightarrow 2}} + \overrightarrow{B_{1\longrightarrow 2}} + \overrightarrow{D_{5\longrightarrow 2}} = \overrightarrow{0}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -650 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_D = -\frac{\sqrt(3)}{2}k \\ y_D = \frac{1}{2}k \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

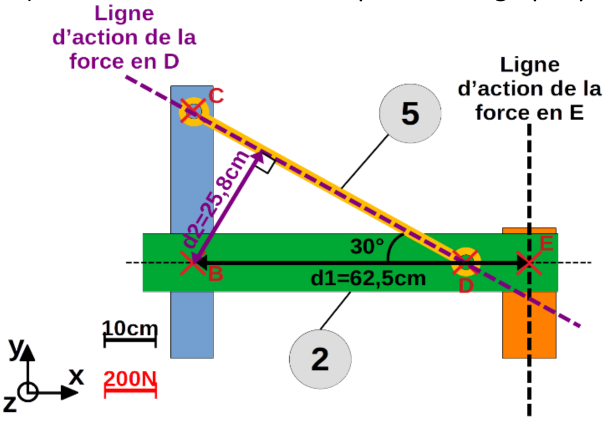
On obtient ainsi les deux équations suivantes :

- sur l'axe x : $0 + x_B - \frac{\sqrt(3)}{2}k = 0$
- sur l'axe y : $-650 + y_B + \frac{1}{2}k = 0$

On a 3 inconnues, il nous faut une 3ème équation → on utilise donc l'équation des moments, en exprimant les moments par rapport au point B, car la force $\overrightarrow{B_{1\longrightarrow 2}}$ est celle pour laquelle nous avons le moins de données :

$$\sum M_B\overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$$
$$\Longleftrightarrow M_B\overrightarrow{E_{3\longrightarrow 2}} + M_B\overrightarrow{B_{1\longrightarrow 2}} + M_B\overrightarrow{D_{5\longrightarrow 2}} = 0$$

On exprime les moments en B (les distances sont déduites par lecture graphique) :



- $M_B\overrightarrow{E_{3\longrightarrow 2}} = \pm \|E_{3\longrightarrow 2}\| \times d1 \approx \pm 650 \times 0,625 \approx -406Nm$, le signe final est négatif car la force en E, qui est vers le bas, tend à faire tourner la pièce 2 dans le sens anti-trigonométrique par rapport au point B.
- $M_B\overrightarrow{B_{1\longrightarrow 2}} = 0$, car un moment est nul en son point d'application.
- $M_B\overrightarrow{D_{5\longrightarrow 2}} = \pm \|D_{5\longrightarrow 2}\| \times d2 \approx \pm k \times 0,258 \approx \pm 0,258k$, avec k positive. Le signe ne peut pour le moment pas être déterminé, car on ne connaît pas le sens de la force $\overrightarrow{D_{5\longrightarrow 2}}$.

On obtient l'équation : $-406 + 0 \pm 0,258k = 0$.

Nous avons maintenant 3 équations :

- sur l'axe x : $0 + x_B - \frac{\sqrt(3)}{2}k = 0$
- sur l'axe y : $-650 + y_B + \frac{1}{2}k = 0$
- pour les moments autour de z : $-406 + 0 \pm 0,258k = 0$

La troisième équation donne $k=\pm\frac{406}{0{,}258}$ qu'on peut simplifier de cette façon, car k est forcément positive :

$k=\frac{406}{0{,}258}\approx 1570\,N$

On en déduit, avec la première équation que $x_B = \frac{\sqrt(3)}{2}k = \frac{\sqrt(3)}{2} \times 1570 \approx 1360N$

On termine avec la deuxième équation : $y_B=650-\frac{1}{2}k\approx 650-785\approx -135\,N$

Pour terminer, avec k, on peut obtenir les valeurs de x_D et y_D :

- $x_D = -\frac{\sqrt(3)}{2}k \approx -1360N$
- $y_D=\frac{1}{2}k\approx 785\,N$

L'expression vectorielle finale des 3 forces est donc :

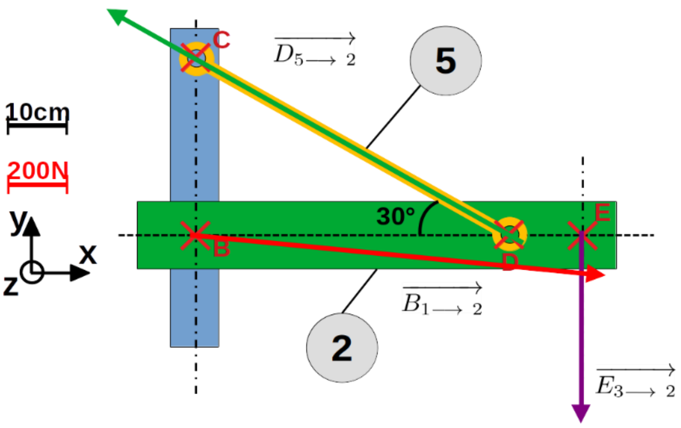
$\overrightarrow{E_{3\longrightarrow 2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -650 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{B_{1\to 2}}=\begin{pmatrix} 1360 \\ -135 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{D_{5\to 2}}=\begin{pmatrix} -1360 \\ 785 \\ 0 \end{pmatrix}$

4.

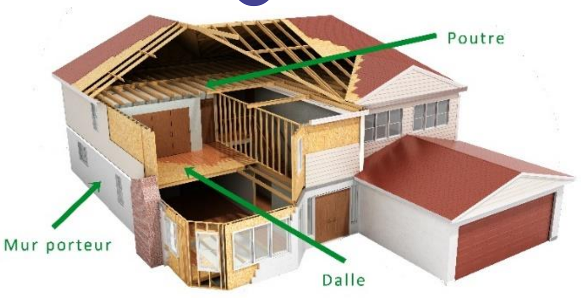
La norme de la force $\overrightarrow{B_{1\longrightarrow 2}}$ vaut $\|\overrightarrow{B_{1\to 2}}\|=\sqrt{1360^2+(-135)^2}\approx 1370\,N$.

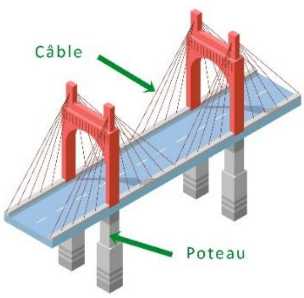
Nom de la force	Point d'application	Direction	Sens	Norme (N)
$\overrightarrow{E_{3\to 2}}$	E	verticale	Vers le bas	650
$\overrightarrow{B_{1\to 2}}$	B	Droite quelconque	Vers la droite et le bas	1370
$\overrightarrow{D_{5\to 2}}$	D	droite (CD)	Vers la gauche et le haut	1570

5.

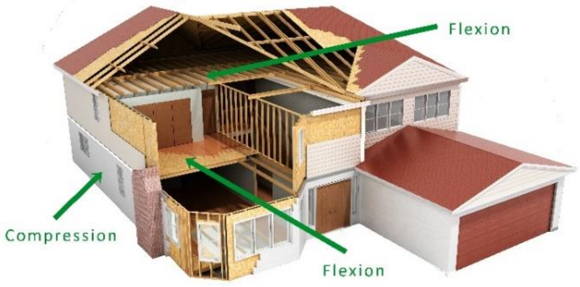


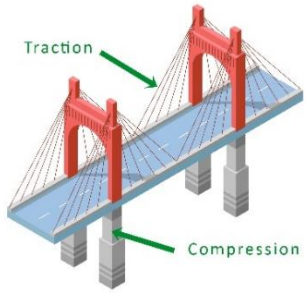
À VOUS DE JOUER 8





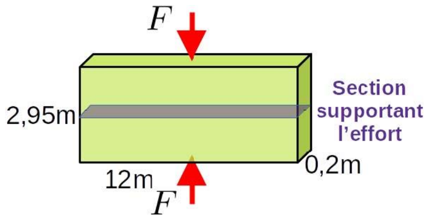
À VOUS DE JOUER 9





À VOUS DE JOUER 10

1. Le mur est comprimé entre le sol et ce qui se trouve au-dessus de lui : on a donc une sollicitation de compression.



2. L'aire de la section vaut :

$$S = largeur \times épaisseur = 12 \times 0,2 = 2,4m^2$$

La force de compression vaut :

$$F = mg \approx 10000 \times 10 = 100000N$$

On a donc :

$$\sigma = \frac{F}{S} \approx \frac{100000}{2,4} \approx 41700Pa = 41,7kPa$$

3. Le câble est étiré par la grue et le bloc de béton : on a donc une sollicitation de traction.

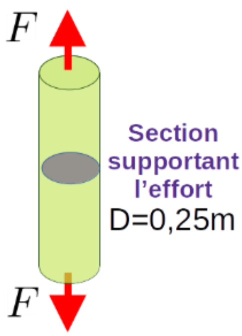
4. L'aire de la section vaut : $S = \pi.r^2 \approx 3,14 \times 0,125^2 \approx 0,0491m^2$

La force de traction vaut : $F = mg \approx 8500 \times 10 = 85000N$

On a donc :

$$\sigma = \frac{F}{S} \approx \frac{85000}{0,0491} \approx 1730000Pa = 1,73MPa$$

À VOUS DE JOUER 11



1. $\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{\pi.r^2} \approx \frac{22000 \times 10}{3,14 \times 0,05^2} = \frac{220000}{0,00785} \approx 28000000Pa = 28MPa$

2. Le câble est en acier, et la résistance d'élasticité de l'acier est de 250MPa.

L'inégalité $\sigma \leq \frac{R_e}{S} \iff 28MPa \leq \frac{250}{3} \iff 28MPa \leq 83,3MPa$ est vérifiée, donc le câble résistera à l'effort.

3. $\sigma = \frac{F}{S} \iff S = \frac{F}{\sigma}$, si on prend le cas extrême, avec un diamètre minimal du câble résistant à la charge, la contrainte dans le câble vaut $\sigma = \frac{R_e}{S} = \frac{250}{3} \approx 83,3MPa$

On a alors $S = \frac{220000}{83300000} \approx 0,00264m^2$

On en déduit que $r = \sqrt{\frac{0,00264}{\pi}} \approx 0,0290m$, soit $D = 2r \approx 0,048m = 4,8cm$

À VOUS DE JOUER 12

1. Tablier : flexion ; pilier et crampon : compression

2. $G_{tablier} = mg \approx 146000 \times 10 = 1460000N$
$Q_{tablier} = N_{véhicule} \times m_{véhicule} \times g \approx 50 \times 1500 \times 10 = 750000N$
$G_{pilier} = mg = \rho \times V \times g = \rho \times h \times \pi \times r^2 \times g \approx 2300 \times 3,14 \times 8 \times 0,8^2 \times 10 \approx 370000N$
$G_{crampon} = mg = \rho \times V \times g = \rho \times h \times \pi \times r^2 \times g \approx 2300 \times 3,14 \times 1 \times 2,2^2 \times 10 \approx 350000N$

3. Chaque pilier reçoit un quart des charges permanentes et d'exploitation du tablier. On a donc :

$$C_{pilier} = \frac{G_{tablier} + Q_{tablier}}{4} = \frac{1460000 + 750000}{4} = 552500N$$

La section du pilier étant de $S = \pi.0,8^2 \approx 2m^2$, on en déduit que :

$$\sigma_{pilier} = \frac{C_{pilier}}{S} \approx \frac{552500}{2} \approx 275000Pa = 275kPa$$

$Re_{béton} = 35MPa$, l'inégalité $\sigma \leqslant \frac{R_e}{S_e} \Leftrightarrow 275\,kPa \leqslant \frac{35}{6} \Leftrightarrow 275\,kPa \ll 5{,}83\,MPa$ est largement vérifiée, donc le pilier résistera à l'effort.

4. Chaque crampon reçoit la même charge qu'un pilier, plus la charge permanente représentée par le pilier au-dessus de lui. On a donc :

$$C_{crampon} = C_{pilier} + G_{pilier} = 552500 + 370000 = 922500N$$

5. Le sol reçoit la même charge qu'un crampon, plus la charge permanente représentée par le crampon au-dessus de lui. On a donc :

$$C_{sol} = C_{crampon} + G_{crampon} = 922500 + 350000 = 1272500N$$

La surface supportant cet effort correspond à la surface du crampon, qui est en contact avec le sol, on a donc :

$$S = \pi.2,2^2 \approx 15,2m^2$$

On en déduit la contrainte sur le sol : $\sigma_{sol} = \frac{C_{sol}}{S} \approx \frac{1272500}{15,2} \approx 83700Pa = 83,7kPa$

$Re_{sol} = 0,19MPa$, l'inégalité $\sigma \leqslant \frac{R_e}{S_e} \Leftrightarrow 83{,}7\,kPa \leqslant \frac{190}{6} \Leftrightarrow 83{,}7\,kPa < 31{,}7\,kPa$ n'est pas vérifiée, donc le pont risque de s'enfoncer dans le sol.

6. Il est possible d'agrandir la surface des crampons, pour distribuer l'effort sur une plus grande surface de sol. On a aussi vu que les piliers étaient bien plus résistants que nécessaire, on pourrait donc les affiner pour gagner plusieurs tonnes. Enfin, on pourrait réduire la hauteur des crampons pour gagner quelques tonnes.

À VOUS DE JOUER 13

1. Pour les forces en A et B, qui sont égales vectoriellement, l'angle de 45° permet de calculer leur composante en x :

$$x_A = x_B = \left\| \overrightarrow{A_{air \to drone}} \right\| \times cos(45°) = 5,55 \times \frac{\sqrt(2)}{2} \approx 3,92N$$

La force en F est intégralement sur l'axe x, donc $x_F = -3,93N$
Enfin, la force en G est intégralement sur l'axe y, donc $x_P = 0N$

2. On applique le PFD $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a}$ sur l'axe x, donc $\sum F_{xext} = m.a_x$:

$x_A + x_B + x_F + x_P = m.a_x$
$\iff 3,92 + 3,92 - 3,93 + 0 = 0,785 \times a_x$

$\iff 3,91 \approx 0,785 \times a_x$

On en déduit que $a_x = \dfrac{3,91}{0,785} \approx 4,98 m.s^{-2}$: il y a une accélération positive sur l'axe x → le drone avance.

3. Pour les forces en A et B, qui sont égales vectoriellement, l'angle de 45° permet de calculer leur composante en y :

$$y_B = y_A = \|\overrightarrow{A_{air \to drone}}\| \times \sin(45°) = \frac{5,55 \times \sqrt{(2)}}{2} \approx 3,92\, N$$

La force en F est intégralement sur l'axe x, donc $y_F = 0N$

Enfin, la force en G est intégralement sur l'axe y, donc $y_P = -7,85N$

4. On applique le PFD $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a}$ sur l'axe y, donc $\sum F_{y\,ext} = m.a_y$

$y_A + y_B + y_F + y_P = m.a_y$

$\iff 3,92 + 3,92 + 0 - 7,85 = 0,785 \times a_y$

$\iff 0 \approx 0,785 \times a_y$

On en déduit que $a_y = 0m.s^{-2}$: il n'y a pas d'accélération sur l'axe y → le drone conserve son altitude.

5. On va utiliser la formule $V(t) = V(0) + a_x \times t$

Au bout de 3s, la vitesse du drone vaudra : $V(3) = 0 + 4,98 \times 3 = 14,94\, m.s^{-1}$

6. Les composantes sur l'axe y sont inchangées, le drone n'accélère donc pas suivant cet axe. Sur l'axe x, on a maintenant $x_F = 7,85N$, donc on va appliquer de nouveau le PFD $\sum F_{x\,ext} = m.a_x$:

$x_A + x_B + x_F + x_P = m.a_x$

$\iff 3,92 + 3,92 - 7,85 + 0 = 0,785 \times a_x$

$\iff 0 \approx 0,785 \times a_x$

On en déduit que $a_x = 0m.s^{-2}$: il n'y a plus d'accélération positive sur l'axe x → le drone conserve sa vitesse.

7. Sur l'axe x, en appliquant le PFD $\sum F_{x\,ext} = m.a_x$, on a :

$x_A + x_B + x_F + x_P = m.a_x$

$\iff x_A + x_B - 4,71 + 0 = 0,785 \times 0$

$\iff x_A + x_B - 4,71 = 0$

$\iff x_A + x_B = 4,71$

Comme $x_A = x_B$, on en déduit que $x_A = x_B = \dfrac{4,71}{2} \approx 2,36N$

8. Sur l'axe y, en appliquant le PFD $\sum F_{y\,ext} = m.a_y$, on a :

$y_A + y_B + y_F + y_P = m.a_y$

$\iff y_A + y_B + 0 - 7,85 = 0,785 \times 4$

$\iff y_A + y_B - 7,85 = 3,14$

$\iff y_A + y_B = 3,14 + 7,85 = 10,99$

Comme $y_A = y_B$, on en déduit que $y_A = y_B = \dfrac{10,99}{2} \approx 5,5N$

9. Finalement, on peut calculer la norme des forces en A et B :

$$\left\|\overrightarrow{A_{air \to drone}}\right\| = \left\|\overrightarrow{B_{air \to drone}}\right\| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \approx \sqrt{2,36^2 + 5,5^2} \approx \sqrt{35,8} \approx 5,98N$$

À VOUS DE JOUER 14

1. $J_{balle\Delta} = \frac{2}{5} m r^2 = \frac{2}{2} \times 0{,}0027 \times 0{,}02^2 \approx 4{,}32 * 10^{-7}\, kg.m^2$

2. $J_{golf\ \Delta} = \frac{2}{5} m r^2 = \frac{2}{2} \times 0{,}04593 \times 0{,}02135^2 \approx 8{,}374 * 10^{-6}\, kg.m^2$

3. La balle de golf sera plus difficile à mettre en rotation, car son moment d'inertie est plus élevé.

$\frac{J_{golf\ \Delta}}{J_{balle\ \Delta}} = \frac{8{,}374 * 10^{-6}}{4{,}32 * 10^{-7}} \approx 19$ → Elle sera environ 19 fois plus difficile à faire tourner.

4. La balle de golf sera plus difficile à mettre en translation, car sa masse est plus élevée.

$\frac{m_{golf}}{m_{balle}} = \frac{45{,}93}{2{,}7} \approx 17$ → Elle sera environ 17 fois plus difficile à mettre en translation.

5. Pour le cylindre plein : $J_{plein\Delta} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 0,05^2 = 0,00375 kg.m^2$

Pour le cylindre creux : $J_{creux\ \Delta} = \frac{1}{2} m (r_1{}^2 + r_2{}^2) = \frac{1}{2} \times 2 \times (0{,}06^2 + 0{,}07^2) = 0{,}0085\, kg.m^2$

C'est donc le cylindre plein qui sera plus difficile à mettre en rotation, car son moment d'inertie est plus important.

À VOUS DE JOUER 15

1. La balle ralentit de $-3{,}5 rad.s^{-2}$. On connaît son moment d'inertie, car on l'a calculé précédemment :

$$J_{balle\Delta} \approx 4{,}32 * 10^{-7}\, kg.m^2$$

Le seul couple appliqué à la balle est celui de l'air, qu'on notera C_{air}. On applique le PFD :

$\sum C = J_{balle\ \Delta}\, \alpha \Leftrightarrow C_{air} = J_{balle\ \Delta}\, \alpha$

$\Leftrightarrow C_{air} = 4{,}32 * 10^{-7} \times 3{,}5 = 1{,}512 * 10^{-6}\, N.m$

2. La balle ralentit de $-3{,}5 rad.s^{-2}$. On connaît son moment d'inertie, car on l'a calculé précédemment :

$$J_{golf\ \Delta} \approx 8{,}374 * 10^{-6}\, kg.m^2$$

Le seul couple appliqué à la balle est celui de l'air, qu'on notera C_{air}. On applique le PFD :

$\sum C = J_{golf\Delta}\alpha \iff C_{air} = J_{golf\Delta}\alpha$

$\Leftrightarrow C_{air} = 8{,}374 * 10^{-6} \times 3{,}5 = 2{,}9309 * 10^{-5}\, N.m$

3. On commence par calculer le moment d'inertie de la poulie, en utilisant la formule du cylindre creux :

$J_{poulie\Delta} = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2) = \frac{1}{2} \times 0,38 \times (0,016^2 + 0,075^2) \approx 0,00112 kg.m^2$

Ensuite, on applique le PFD : $\sum C = J_{poulie\Delta}\alpha$

$\iff C_{motoréducteur} + C_{poulie} + C_{frottements} = J_{poulie\Delta}\alpha$

$\iff 1,19 - 0,87 - 0,33 = 0,00112 \times \alpha$

$\iff -0,01 = 0,00112 \times \alpha$

Ce qui nous donne $\alpha = \frac{-0,01}{0,00112} \approx -8,95 rad.s^{-2}$

La poulie est donc en train de ralentir, avec une accélération de $-8,95 rad.s^{-2}$

4. On reprend le PFD : $\sum C = J_{poulie\Delta}\alpha$

$\iff C_{motoréducteur} + C_{poulie} + C_{frottements} = J_{poulie\Delta}\alpha$

$\iff C_{motoréducteur} - 0,87 - 0,33 = 0,00112 \times 6$

$\iff C_{motoréducteur} = 0,00672 + 0,87 + 0,33 \approx 1,21 Nm$

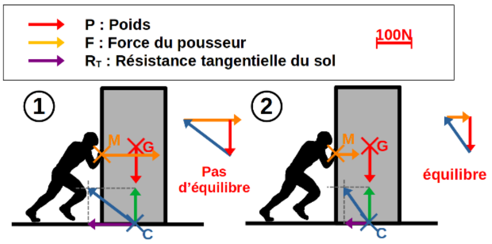
Il faut donc un couple pour le motoréducteur de $1{,}21 Nm$ pour obtenir une accélération de $6 rad.s^{-2}$ dans le sens trigonométrique.

À VOUS DE JOUER 16

1. 2. 3.

Vignette 1 : $R_T \approx 130N$, glissement

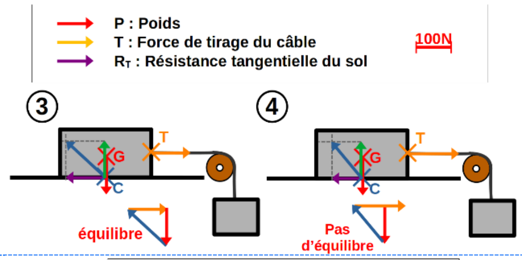
Vignette 2 : $R_T \approx 65N$, adhérence



4. 5. 6.

Vignette 3 : $R_T \approx 107N$, adhérence

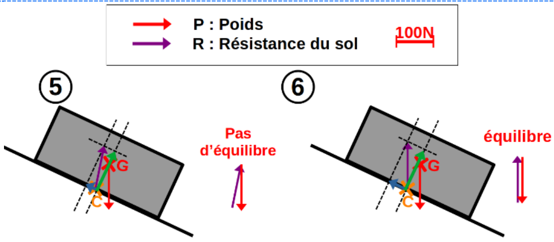
Vignette 4 : $R_T \approx 140N$, glissement



7. 8. 9.

Vignette 5 : $R_T \approx 13N$, adhérence

Vignette 6 : $R_T \approx 20N$, glissement



À VOUS DE JOUER 17

1. On peut calculer $\left\|\vec{P}\right\| = m.g \approx 1140 \times 10 = 11400N$

On en déduit, pour respecter l'équilibre des forces sur l'axe vertical, que $\left\|\overrightarrow{R_N}\right\| = \left\|\vec{P}\right\| = 11400N$

2. La résistance normale ne change pas, on a donc toujours $R_N = 11400N$. On applique la loi de Coulomb $R_T = \mu_d.R_N$ avec $\mu_d = 0,85$ car le temps est sec : $R_T = 0,85 \times 11400 = 9690N$

La résistance globale du sol vaut : $\left\|\vec{R}\right\| = \sqrt{R_N^2 + R_T^2} \approx \sqrt{11400^2 + 9690^2} \approx 14960N$

3. On a toujours $\left\|\overrightarrow{R_N}\right\| = \left\|\vec{P}\right\| = 11400N$

On applique la loi de Coulomb avec $\mu_d = 0,65$ car le temps est humide : $R_T = 0,65 \times 11400 = 7410N$

La résistance globale du sol vaut : $\left\|\vec{R}\right\| = \sqrt{R_N^2 + R_T^2} \approx \sqrt{11400^2 + 7410^2} \approx 13600N$

À VOUS DE JOUER 18

1. En appliquant l'échelle, on obtient $\|\vec{R}\| = 0{,}02\ N$, ce qui donne :

$R_N = \left\|\vec{R}\right\| \times cos(20°) \approx 0,0188N$

$R_T = \left\|\vec{R}\right\| \times sin(20°) \approx 0,00684N$

2. La loi de Coulomb donne : $R_T = \mu_d.R_N \iff \mu_d = \dfrac{R_T}{R_N} \approx \dfrac{0,00684}{0,0188} \approx 0,364$

À VOUS DE JOUER 19

1. Sur l'axe vertical, l'arbre est soumis à deux forces : son poids $\vec{P}$; la résistance du sol $\vec{R}$ dont la composante normale compense $\vec{P}$. On peut calculer $\left\|\vec{P}\right\| = m.g \approx 160 \times 10 = 1600N$, ce qui permet de déduire que $R_N = 1600\ N$.

Ensuite, on peut calculer $\mu_s.R_N = 0,4 \times 1600 = 640N$. La loi de Coulomb dans un cas statique donne $R_T \leq \mu_s.R_N$: ce qui signifie que la force tangentielle doit être supérieure à 640N pour vaincre l'adhérence. Or, ici, la force tangentielle n'est que de 570N, donc l'arbre ne bougera pas.

2. On a toujours $\mu_s.R_N = 0,4 \times 1600 = 640N$. La loi de Coulomb dans un cas statique donne $R_T \leq \mu_s.R_N$: ce qui signifie que la force tangentielle doit être supérieure à 640N pour vaincre l'adhérence. Ici, c'est le cas, car la force de tirage est de 820N.
Le tronc d'arbre va donc glisser, on peut appliquer la loi de Coulomb dans un cas dynamique pour déterminer la force de frottement $R_T = 0,2 \times 1600 = 320N$
Pour déterminer l'accélération, on applique le PFD, qui donne, sur l'axe horizontal (qu'on notera x et dont le sens sera vers la droite) :

$$\sum F_{xext} = m.a_x$$

$\iff T + R_T = m.a_x$, avec T la norme de la force de tirage.

$$\iff a_x = \frac{T + R_T}{m} = \frac{820 - 320}{160} = 3,125 m.s^{-2}$$

À VOUS DE JOUER 20

1. En appliquant l'échelle, on obtient $\vec{R} = 0,02N$, ce qui donne :

$$R_N = \left\|\vec{R}\right\| \times cos(20°) \approx 0,0188N$$

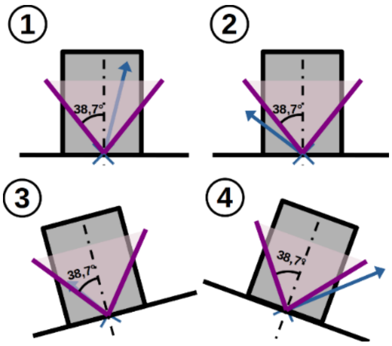
$$R_T = \left\|\vec{R}\right\| \times sin(20°) \approx 0,00684N$$

On va alors comparer $R_T =\approx 0,00684N$ et $\mu_s.R_N = 0,38 \times 0,0188 \approx 0,00714N$.
On remarque que l'inégalité de la loi de Coulomb pour l'adhérence $R_T \leq \mu_s.R_N$ est vérifiée : on en conclut que la pièce ne glisse pas.
2. On va comparer maintenant $R_T =\approx 0,00684N$ et $\mu_s.R_N = 0,18 \times 0,0188 \approx 0,00338N$. On remarque que l'inégalité de la loi de Coulomb pour l'adhérence $R_T \leq \mu_s.R_N$ n'est pas vérifiée : on en conclut que la pièce glisse.

À VOUS DE JOUER 21

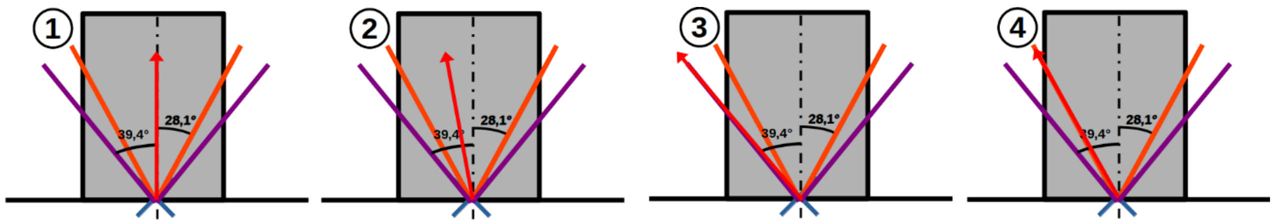
1. Dans les vignettes 2 et 3, la caisse est poussée depuis la gauche. Dans les vignettes 1 et 4, la caisse est poussée depuis la droite.
2. On commence par calculer $\theta = artcan(\mu_s) = arctan(0,8) \approx 38,7°$
On peut ensuite représenter le cône d'adhérence sur chaque vignette, en le centrant par rapport à la normale au sol (surface de contact).
On en déduit que :

- ✓ sur la vignette 1, il y a adhérence
- ✓ sur la vignette 2, il y a glissement vers la droite
- ✓ sur la vignette 3, il y a adhérence
- ✓ sur la vignette 4, il y a glissement vers la gauche



À VOUS DE JOUER 22

1. 2. 3.



4. $\mu_s = tan(\theta) = tan(39,4°) \approx 0,821$
5. $\mu_d = tan(\phi) = tan(28,1°) \approx 0,534$