COURS PI

☆ L'école sur-mesure ☆

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Terminale - Module 3 - Graphiques - Matrices

Mathématiques Expertes

v.5.1

- **Guide de méthodologie** *pour appréhender notre pédagogie*
- **Leçons détaillées** *pour apprendre les notions en jeu*
- **Exemples et illustrations** *pour comprendre par soi-même*
- **Prolongement numérique** *pour être acteur et aller + loin*
- **Exercices d'application** *pour s'entraîner encore et encore*
- **Corrigés des exercices** *pour vérifier ses acquis*

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

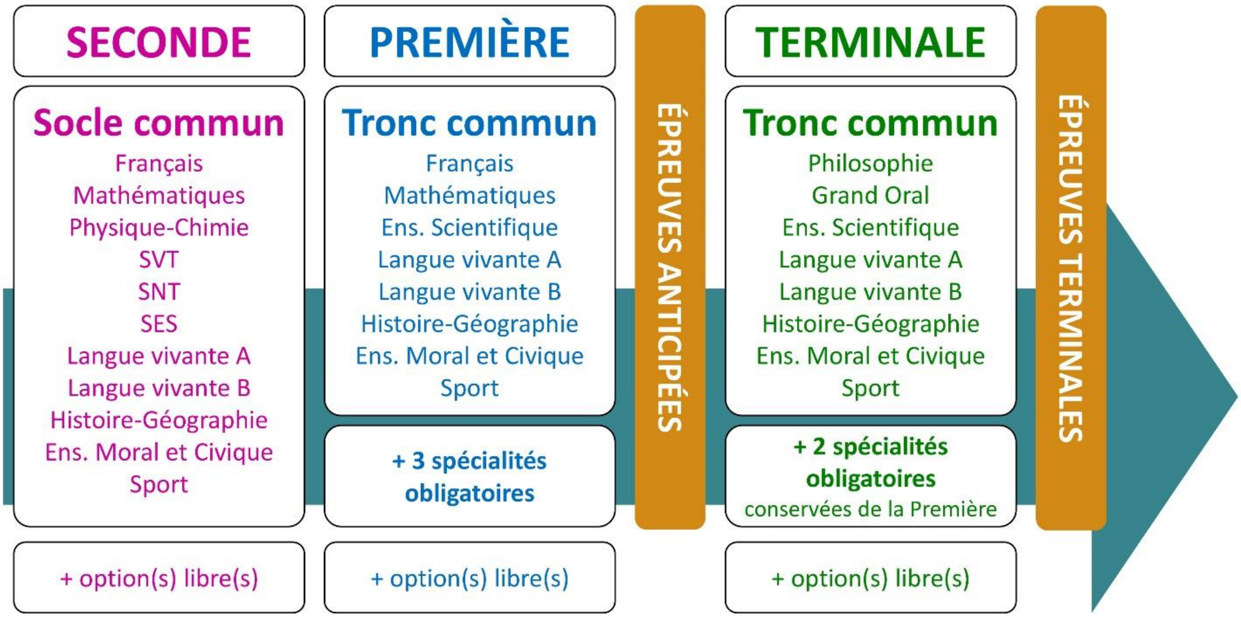
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s'ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **Réfléchissons ensemble** pour guider l'élève dans la réflexion
- **L'essentiel** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification
- **Pour aller plus loin** pour visionner des sites ou des documentaires ludiques de qualité
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES EXPERTES TERMINALE

Module 3 – Graphiques - Matrices

L'AUTEUR

Jonathan SELLAM

"Enseigner c'est d'abord éveiller, à la curiosité et donner l'envie d'en savoir plus".

Professeur de mathématiques qui acccompagne les élèves jusqu'à la préparation aux concours, professeur de physique dans une école d'ingénieur à Montpellier, il reste curieux de tout et surtout de l'histoire des sciences.

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS A L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
   *Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir** ; plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
QUEL EST SON RÔLE ?	Orienter les parents et les élèves. Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève. Faire évoluer les outils pédagogiques. Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Une question sur sa correction ? • faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro. • autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi. 04.67.34.03.00 scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

Mathématiques Expertes - Module 3 - Graphiques - Matrices

COMPÉTENCES VISÉES

- Opérations sur les matrices.
- Matrice inverse et puissance de matrice.
- Matrices et systèmes linéaires.
- Matrices et transformations géométriques.
- Suite de matrices colonnes.

COMPÉTENCES VISÉES

- Les graphes : vocabulaire, première propriétés et modélisation.
- Matrice d'adjacence d'un graphe, nombre de chaîne de longueur donnée.
- Les chaînes de Markov.

SUGGESTIONS CULTURELLES

ESSAIS

- **Dictionnaire amoureux des mathématiques** *André Deledicq et Mickaël Launay*
- **La Science et l'Hypothèse** *Henri Poincaré*
- **Les mathématiques sont la poésie des sciences** *Cédric Villani*
- **Atlas des mathématiques** *Fritz Reinhardt et Heinrich Soeder*
- **Pourquoi le monde est-il mathématique ?** *John D. Barrow*
- **La formation de l'esprit scientifique** *Gaston Bachelard*
- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths :de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths.** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

PODCAST

- **L'oreille mathématique** *https://maison-des-maths.paris/podcasts/*

Le Cours

INTRODUCTION

Bienvenue cher élève ! Vous entrez dans le monde passionnant des Matrices et des Graphes. Passionnant tant ces thèmes sont utilisés dans un nombre impressionnant de domaines proches ou éloignés des mathématiques… Biologie, Epidémiologie, Physique, Gestion et Marketing, Démographie, Informatique, intelligence artificielle ! Les champs d'utilisation sont très nombreux et variés.

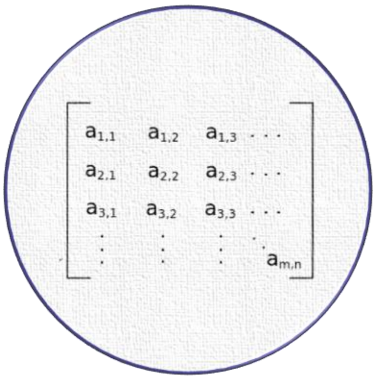
Saviez-vous que lorsque vous faites une recherche sur internet, l'ordre d'affichage des résultats des pages proposées s'appuie sur un algorithme dont le cœur est l'utilisation d'un mélange de matrices et de graphes nommé Chaînes de Markov ? Nous allons y consacrer un chapitre entier. De même, la physique quantique, immense révolution dont on ne connait pas encore l'ampleur, utilise dans son formalisme les matrices ?

Savez-vous que pour évaluer les dynamiques de population, l'utilisation des matrices est essentielle afin d'affiner et de mieux comprendre le comportement des consommateurs en marketing avec un outil que l'on nomme l'analyse en composantes principales ?

Si vous vous êtes déjà posé la question de l'utilité des mathématiques alors vous n'aurez plus de doutes après avoir travaillé ce manuel ! Vous allez saisir l'immense efficacité des mathématiques au service des autres disciplines.

Néanmoins les mathématiques n'ont pas pour unique vocation d'être utiles et vous allez découvrir des objets mathématiques puissants, comprendre de nouveaux concepts et apprécier des raisonnements subtils. Vous allez gouter aux « décloisonnement » des chapitres tant on vous demandera de monopoliser vos connaissances sur les suites, la géométrie, les probabilités, les fonctions et les limites !

CHAPITRE 1
LES MATRICES



Au cours de cette première partie, nous verrons avant tout la définition des matrices. Les notions de puissances et de matrices inverses seront alors vues avant de voir les potentielles applications géométriques. Enfin, nous nous intéresserons aux liens entre les matrices et les systèmes d'équations puis leurs applications dans le cadre des suites.

Pour apprendre à utiliser la calculatrice pour le calcul de matrices vous pouvez regarder la vidéo publiée par ***TI Education France*** sur YouTube ; **matrices et calcul matriciel avec la TI-83 Premium CE**, dont voici le lien :

https://www.youtube.com/watch?v=xgStaPSg0f8

COMPÉTENCES VISÉES

- Opérations sur les matrices.
- Matrice inverse et puissance de matrice.
- Matrices et systèmes linéaires.
- Matrices et transformations géométriques.
- Suite de matrices colonnes.

PRÉ-REQUIS

- Savoir faire des raisonnements par récurrence, connaitre le binôme de Newton et le calcul des coefficients $\binom{n}{k}$, des notions sur les suites géométriques et le calcul de limite de suite.

Première approche

« Un outil efficace pour manipuler des données »

Sans plus attendre faisons un premier pas vers les matrices à travers l'activité que je vous propose :

Maintenant que vous avez vu ce qu'était une matrice découvrons les premières propriétés.

Lors d'un festival de musique qui a duré trois jours, une buvette a enregistré ses ventes quotidiennes. Les voici :

> La buvette vend trois types de « produits » : Sandwichs, Frites, Boissons.
> Les Sandwichs sont vendus en moyenne à 6 euros, les boissons à 3 euros et les frites : 2 euros.
> Le premier jour la buvette a vendu : 85 sandwichs, 110 frites et 225 boissons.
> Le deuxième jour la buvette a vendu : 130 sandwichs, 170 frites, 310 boissons.
> Le dernier jour la buvette a vendu : 90 sandwichs, 120 frites et 210 boissons.

1. A partir de ces données calculez les recettes de chaque journée puis les présenter sous forme d'un tableau à une colonne où les lignes représentent les jours et la colonne les recettes. On notera ce tableau R, pour recette.

Les matrices sont des tableaux de valeurs. Vous venez créer une matrice ! C'est la matrice donnant la recette en fonction des journées. Nous allons retrouver ce résultat en utilisant d'autres tableaux et en faisant des opérations entre ces tableaux.

2. Déterminez un tableau noté A à trois lignes et trois colonnes représentant les produit (les colonnes) en fonction des jours (les lignes) et un tableau noté P d'une seule colonne et de trois lignes donnant le prix (colonne) en fonction des produits (lignes).

3. On définit une opération qu'on nommera « produit d'une ligne par une colonne » de cette manière :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = aa' + bb' + cc'.$$

Dans quel chapitre mathématique avez-vous déjà rencontré une opération similaire ?
Réalisez cette opération pour chaque ligne du tableau A avec le tableau P. Vous présenterez vos résultats sous la forme d'un tableau à une colonne. Que constatez-vous ? Vous venez de faire vos premières opérations matricielles !

4. Des festivaliers se sont plaints du prix des produit de la buvette les jugeant trop élevés. Le gérant a alors estimé que pour l'année prochaine, s'il baissait de 20% ses prix il augmenterai de 20% ses ventes. En partant du principe que ses prédictions se réaliseront, a-t-il intérêt d'adopter cette stratégie (dans un but lucratif) ?

CORRECTION :

1. Pour calculer les recettes, il suffit de multiplier pour un jour donné, les ventes de chaque produit par son prix associé on obtient alors le tableau suivant : pour le jour 1 on a fait le calcul suivant :

$$Jour1 = 85 \times 6 + 110 \times 3 + 225 \times 2 = 1290$$

$Tableau\ R$	Recettes
Jour 1	1290
Jour2	1910
Jour 3	1320

2. On obtient :

$Tableau\ A$	Sandwichs	Frites	Boisons
Jour 1	85	110	225
Jour 2	130	170	310
Jour 3	90	120	210

$Tableau\ P$	Prix
Sandwichs	6
Frites	3
Boisons	2

Nous venons de réorganiser les données sous une forme plus lisible, sous forme de tableau. Ces tableaux en mathématiques nous les appellerons des matrices et apprendrons à réaliser des calculs dessus afin de nous fournir plus d'informations.

3. Lorsque on connait les coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{u'}(a', b', c')$ alors le produit scalaire donne : $\vec{u}.\vec{u'} = aa' + bb' + cc'$. Finalement l'opération « produit d'une ligne par une colonne » s'apparente à un produit scalaire entre un vecteur dont les coordonnées sont en lignes avec un vecteur dont les coordonnées sont en colonnes.

En faisant cette opération pour chaque ligne tu tableau A avec la colonne P on a les opérations suivantes :

$$(85 \quad 110 \quad 225)\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} = 85 \times 6 + 110 \times 3 + 225 \times 2 = 1290$$

On obtient de même : $(130 \quad 170 \quad 310)\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} = 1910$ et $(90 \quad 120 \quad 210)\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} = 1320$

En réorganisant cela sous forme d'une colonne on obtient : le tableau des recettes !

On vient de montrer en définissant l'opération « produit d'une ligne par colonne » on obtient l'égalité : $AP = R$

4. Augmenter de 20% cela revient à multiplier par $1{,}2$ et diminuer de 20% cela revient à multiplier par $0{,}8$. Le nouveau tableau des ventes qu'on notera A' est l'ancien tableau des ventes multiplié par $1{,}2$ (puisqu'on augmente les ventes de 20%) ainsi on peut écrire que $A' = 1{,}2A$ où l'on considère que chaque valeur du tableau A est multipliée par $1{,}2$

Ce qui donne

$Tableau\ A'$	Sandwichs	Frites	Boisons
Jour 1	102	132	270
Jour 2	156	204	372
Jour 3	108	144	252

et $P' = 0{,}8P$ car les nouveaux ont diminué de 20% ce qui donne :

$Tableau\ P'$	Prix
Sandwichs	4,8
Frites	2,4
Boisons	1,6

Il ne reste plus qu'à calculer les nouvelles recettes en utilisant l'égalité :

$$A'P' = R'$$

On obtient :

$Tableau\ R'$	Recettes
Jour 1	1238,4
Jour2	1833,6
Jour 3	1267,2

Pour conclure il suffit de faire la somme pour $R_{tot} = 1290 + 1910 + 1320 = 4520$

Et $R'_{tot} = 1238{,}4 + 1833{,}6 + 1267{,}2 = 4339{,}2 \Longrightarrow \frac{R'_{tot}}{R_{tot}} = \frac{4339{,}2}{4520} = 0{,}96 \Longrightarrow R'_{tot} = 0{,}96R_{tot}$

On a $R'_{tot} < R_{tot}$ donc la nouvelle stratégie n'est pas vraiment adaptée.

Remarquons que l'on pouvait aller beaucoup plus vite en utilisant les relations tableaux :

On sait que $AP = R$ et $A'P' = R'$ or $A' = 1{,}2A$ et $P' = 0{,}8P$ donc $R' = (1{,}2A)(0{,}8P) = 0{,}96AP = 0{,}96R$

Donc $R'_{tot} = 0{,}96R_{tot}$. Cet exemple sert à comprendre l'utilité de modéliser mathématiquement des tableaux afin de pouvoir y faire des calculs plus rapides et plus efficaces.

Finalement les matrice ne sont rien d'autre que des tableaux de nombres la matrice associée au tableau A donnera : $\begin{pmatrix}85 & 110 & 225\\130 & 170 & 310\\90 & 120 & 210\end{pmatrix}$

LES MATRICES

Opérations sur les matrices

DÉFINITION

Considérons un exemple de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Nous venons de créer une matrice notée A. Une matrice est un tableau de nombres. Lorsque les nombres sont des réels, nous dirons que A est une matrice réelle. Si les nombres sont des complexes, alors A sera une matrice complexe.

Les nombres qui composent la matrice sont appelées **les coefficients de la matrice**. Un coefficient sera noté a_{ij} où i représente l'indice de ligne et j l'indice de colonne. Par exemple, on écrira que $6 = a_{32}$ car 6 est le coefficient situé sur la troisième ligne et la deuxième colonne.

Cette matrice est composée de trois lignes et deux colonnes. On note $\mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices réelles de deux lignes et trois colonnes. On a donc que $A \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$, qui signifie que A est un élément de cet ensemble.

On dit que le nombre 2×3 est la dimension de la matrice. A est donc une matrice de dimension 2×3.

On peut généraliser une matrice A réelle de dimension $n \times p$ comme un tableau composé de n lignes et p colonnes. On note alors :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$ avec a_{ij} le coefficient réel situé sur la i$^{\text{ième}}$ ligne et j$^{\text{ième}}$ colonne.

On peut aussi trouver cette notation très pratique : $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$.

Exemple :

La matrice de dimension 2×3 définie par $(2^{i-j})_{\substack{1 \le i \le 2 \\ 1 \le j \le 3}}$ est la matrice composée de deux lignes et trois colonnes sa représentation sous forme de tableau donne : $\begin{pmatrix} 2^{1-1} & 2^{1-2} & 2^{1-3} \\ 2^{2-1} & 2^{2-2} & 2^{2-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ avec le coefficient $a_{ij} = 2^{i-j}$.

À VOUS DE JOUER 1

« Utilisez la notation $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ tu apprendras »

Vous allez vous entrainer à écrire les matrices sous forme de tableau à partir de leur définition :

1. Donnez les matrices définies par :

$$A = (i+j)_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}}, B = (1)_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}}, C = (i^j)_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 2}}, D = \left(\frac{i \times 2^{i-1}}{j}\right)_{\substack{1 \le i \le 2 \\ 1 \le j \le 2}}, E = \left(\binom{i+j}{i}\right)_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}}$$

2. Réciproquement, donnez les définitions des matrices sous la forme $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\\ 3 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5}\\ \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

Remarquons qu'il est souvent beaucoup plus simple de partir de la définition pour en donner une forme explicite sous forme de tableau que le contraire. Habituez-vous à cette manière de définir les matrices car c'est souvent pratique et cela permet de gagner du temps.

Maintenant que vous connaissez la définition d'une matrice, sachez qu'il existe un vocabulaire que vous devez connaitre.

DÉFINITION

- Une matrice qui possède le même nombre de lignes que de colonnes est une **matrice carrée**.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée dit d'ordre 2. Une matrice carrée d'ordre p contiendra p lignes et p colonnes. Dans notre exemple $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Remarquez que lorsque l'on a une matrice carrée, on écrit juste la valeur du nombre de lignes car le nombres de colonnes s'en déduit. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Représente l'ensemble des matrices carrées de dimension $n \times n$.

- Une matrice à une ligne et p colonnes est une **matrice ligne**

Exemple : $A = (1 \quad 2 \quad 3)$ est une matrice ligne. On a $A \in \mathcal{M}_{13}(\mathbb{R})$.

- Une matrice à une colonne et p lignes est une **matrice colonne.**

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne. On a $A \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$.

Dans tous les autres cas, nous parlerons de matrice quelconque. Nous travaillerons très fréquemment avec les matrices carrées, lignes et colonnes. Parmi les matrices carrées, on recense :

- **La matrice identité** aussi dite **unitaire** notée $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'indice donne le nombre de lignes et de colonnes. Par exemple, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Les matrices diagonales** qui ont des zéros partout sauf éventuellement sur la diagonale.

Exemple : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale car tous les termes en dehors de la diagonale sont nuls. Remarquez qu'il peut y avoir des 0 sur la diagonale mais ce n'est pas obligé. I_3 est un exemple de matrice diagonale. Tout comme I_2 est aussi une matrice diagonale de dimension 2×2.

- **La matrice Nulle** qui est formée de 0 partout.

On la notera 0_n où n renseigne sur le nombre de lignes et de colonnes. Exemple : $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Les matrices triangulaires** : on dira qu'une matrice carrée est triangulaire supérieure si tous les termes en dessous de la diagonale sont nuls.

Exemple : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure. Une matrice est dite triangulaire inférieure si tous les termes au-dessus de la diagonale sont nuls. Un exemple : $T' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Donnons les écritures plus formelles de chacune de ces matrices particulières :
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de dimension $n \times n$ (donc carrée). Dans toute la suite on a : $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.
Alors :

$$A = I_n \Leftrightarrow a_{ij} = \delta_{ij}$$

δ_{ij} est un symbole qui porte le nom de symbole de Kronecker. Voici sa définition : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$
Par exemple $\delta_{12} = 0$ car $1 \neq 2$ mais $\delta_{22} = 1$ car $2 = 2$. C'est un symbole qui prend la valeur 1 ou 0 suivant si les indices sont égaux ou différents.
Poursuivons avec les définitions formelles :

- A est une matrice diagonale $\Leftrightarrow a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
- A est la matrice nulle $\Leftrightarrow a_{ij} = 0$.
- A est une matrice triangulaire supérieure $\Leftrightarrow a_{ij} = 0$ pour $i > j$.
- A est un matrice triangulaire inférieure $\Leftrightarrow a_{ij} = 0$ pour $i < j$.

Après ces nombreuses définitions, nous voilà prêt pour commencer à manipuler ces nouveaux « objets ». Comme souvent en mathématiques, on commence par apprendre à faire des opérations. Voici alors comme on opère :

DÉFINITION

Considérons deux matrices quelconques de **même dimension** :

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et

$B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ alors on peut définir :

- **L'addition** $A+B$ qui donnera une matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ alors $A+B = \begin{pmatrix} 1+2 & -1+3 \\ 4+1 & 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

- **La soustraction** $A-B$ qui donnera une matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} = (a_{ij}-b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ alors $A-B = \begin{pmatrix} 1-2 & -1-3 \\ 4-1 & 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

- **La multiplication par un scalaire k** : $k\times A$ donnera une matrice

$C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} = (k\times a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $k=9$ alors $kA = \begin{pmatrix} 9\times 1 & 9\times(-1) \\ 9\times 4 & 9\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 36 & 18 \end{pmatrix}$

- **La transposée** notée A^T qui consiste à transformer les lignes en colonnes telle que $A^T = (a_{ji})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ (Remarquez que l'on a permuté l'indice des lignes avec celui des colonnes)

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Remarquez que la première colonne de la matrice A correspond à la première ligne de la matrice A^T et que la seconde colonne de la matrice A correspond à la seconde ligne de la matrice A^T. L'opération de transposition change la dimension d'une matrice. En effet, A est une matrice de dimension 3×2 et A^T sera de dimension 2×3.

- **Le produit** : AB. C'est une opération plus compliquée que les précédentes.

Pour qu'un produit soit réalisable, il faut que le nombre de **colonnes** de la première matrice soit égale au nombre de **lignes** de la seconde matrice. Exemple : si la matrice A admet 3 colonnes alors, pour faire un produit, il faut que la matrice B admette 3 lignes. Avant d'en donner une formule précise, montrons sur un exemple comment on calcule un produit :

Exemple : Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

On souhaite calculer le produit AB. $A\in\mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ la condition est donc remplie : le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de Bqui vaut 3. Maintenant quelle sera la dimension de la matrice AB ? Elle aura le nombre de lignes de A et le nombre de colonnes de B (les indices en rouge). Voici la forme finale :

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

Comment calculer la valeur de chaque coefficient de la matrice AB ? Prenons comme exemple le coefficient c_{12}. Pour le calculer on aura besoin de prendre la ligne 1 de la matrice A et la colonne 2 *de la matrice* B : *les voici* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors le coefficient $c_{12} = 1\times 2 + 2\times 2 + 3\times 3 = 15$.

Ce type de calcul doit vous faire penser au calcul d'un produit scalaire de deux vecteurs, c'est le même procédé. Nous calculerons chaque coefficient de la même manière. Par exemple le coefficient c_{23} sera obtenu en considérant la 2$^{\text{ième}}$ ligne de la matrice A et la 3$^{\text{ième}}$ colonne de la matrice B : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et on obtient $c_{23} = \frac{1}{2} \times 3 + 1 \times 3 + \frac{3}{2} \times 3 = 9$.

A la fin nous obtenons $AB = \begin{pmatrix} 14 & 15 & 18 \\ 7 & \frac{15}{2} & 9 \end{pmatrix}$.

Voici maintenant la définition formelle d'un calcul de produit :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$. Alors le produit AB existe et donnera une matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{R})$ donc le calcul de c_{ij} est le suivant :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}$$

Finalement cela donne $\boldsymbol{AB} = \left(\sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{a_{ik} b_{kj}}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$. C'est une définition à retenir car elle sera à la base de plusieurs démonstrations. Remarquez que si nous voulons calculer un coefficient par exemple le coefficient c_{13} alors il suffit de remplacer i par 1 et j par 3 dans la définition. Cela donnera : $c_{13} = \sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{a_{1k} b_{k3}} = a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} + a_{13} b_{33} + \cdots + a_{1p} b_{p3}$

À VOUS DE JOUER 2

« Les opérations tu maitriseras »

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Parmi ces matrices, déterminez et calculez toutes les opérations possibles de type : additions et produits.

Faites donc bien attention à l'ordre dans lequel vous réalisez vos produits matriciels. C'est extrêmement important ! Commencez toujours par vérifier que votre produit est réalisable (même nombre de colonnes de la première matrice que de lignes de la seconde matrice). Ensuite, identifiez la dimension de la matrice produit (nombre de ligne de la première matrice et nombre de colonne de la deuxième matrice). Enfin, soyez concentré dans vos calculs. Comme vous pouvez le remarquer le produit est une opération plus complexe que les autres. Il existe des cas particuliers où le produit est simplifié.

PROPRIÉTÉS

« Les produits particuliers »

Soient deux matrices carrées : $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$.

- Si les **matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont triangulaires supérieures** alors AB et BA seront triangulaires supérieures. En général $AB \neq BA$. Les valeurs des coefficients diagonaux de la matrice produit seront les produits des coefficients diagonaux des matrices A et B. Autrement dit :

$$\text{Si } AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \text{ alors } c_{ii} = a_i \times b_i \text{ et } c_{ij} = 0 \text{ pour } i > j.$$

$$\text{Exemple : } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Alors $AB = \begin{pmatrix} 5 & 16 & 41 \\ 0 & 18 & 66 \\ 0 & 0 & 54 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 44 \\ 0 & 18 & 57 \\ 0 & 0 & 54 \end{pmatrix}$. On constate que les produit sont différents mais que cela donne bien des matrices triangulaires supérieures. Cela veut dire que tous les coefficients en dessous de la diagonale valent 0.

De plus, $c_{11} = 5 = a_{11} \times b_{11} = 5 \times 1, c_{22} = 18 = a_{22} \times b_{22} = 6 \times 3, c_{33} = 54 = a_{33} \times b_{33} = 9 \times 6$

- Si les **matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont triangulaires inférieures** alors AB et BA seront triangulaires inférieures. En général $AB \neq BA$. Les valeurs des coefficients diagonaux de la matrice produit seront les produits des coefficients diagonaux des matrices A et B. Autrement dit :

$$\text{Si } AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \text{ alors } c_{ii} = a_i \times b_i \text{ et } c_{ij} = 0 \text{ pour } i < j.$$

$$\text{Exemple : } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Alors $AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 21 & 0 \\ 31 & 29 & 24 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 8 & 21 & 0 \\ 19 & 24 & 24 \end{pmatrix}$. On constate que les produit sont différents mais que cela donne bien des matrices triangulaires inférieures. Cela veut dire que tous les coefficients au-dessus de la diagonale valent 0.

De plus,

$$c_{11} = 4 = a_{11} \times b_{11} = 1 \times 4, c_{22} = 21 = a_{22} \times b_{22} = 3 \times 7, c_{33} = 24 = a_{33} \times b_{33} = 4 \times 6$$

- Si les matrices **$\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont diagonales** alors AB et BA seront diagonales et $\boldsymbol{AB = BA}$.

Les valeurs des coefficients diagonaux de la matrice produits seront les produits des coefficients diagonaux des matrices A et B. Autrement dit :

$$\text{Si } AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \text{ alors } c_{ii} = a_i \times b_i \text{ et } c_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

$$\text{Exemple : } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Alors $AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$. On constate que les produit sont égaux et que cela donne bien des matrices diagonales.

De plus,

$$c_{11} = 4 = a_{11} \times b_{11} = 1 \times 4, c_{22} = 21 = a_{22} \times b_{22} = 3 \times 7, c_{33} = 24 = a_{33} \times b_{33} = 4 \times 6$$

Remarque importante : Si on multiplie une matrice triangulaire supérieure avec une matrice triangulaires inférieure cela donnera en général une matrice « pleine » on perdra le coté triangulaire. Il faudra alors calculer le produit comme un produit « classique ».

Conclusion :

Plus les matrices sont « pleines » (remplies de nombres), plus le produit sera compliqué à calculer. Les produits deviennent plus simples lorsque les matrices sont triangulaires et il devient quasiment « trivial » lorsque les matrices sont diagonales. Ainsi, les matrices diagonales seront des matrices privilégiées lorsque l'on voudra faire des calculs de produit de matrices. L'autre aspect est simplement que, lorsque les matrices sont diagonales, alors le $AB = BA$.

Maintenant que l'on connait toutes ces opérations, voici quelques propriétés importantes autour de ces opérations :

PROPRIÉTÉS
« Ce que l'on peut faire avec les opérations »

Soient A,B, C trois matrices de **même dimension** et k un scalaire (nombre) :

1. $A + B = B + A$: l'addition est une opération commutative.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$: l'addition est une opération associative.
3. $k(A + B) = kA + kB$: le produit par un scalaire est distributif sur l'addition.
4. $kA = Ak$: le produit par un scalaire est commutatif.

Soient A et B dont les dimensions permettent la multiplication alors :

1. $A(BC) = (AB)C$: le produit une opération associative.
2. $A(B + C) = AB + AC$: Le produit est distributif par rapport à l'addition.
3. $AB \neq BA$ en général Le produit entre deux matrices n'est pas commutatif.
4. $I_n A = A I_n = A$: le produit par la matrice identité ne modifie par la matrice. On dit que I_n est un élément neutre pour le produit matriciel.

Commentaires :

Ne confondez pas le produit entre deux matrices et le produit d'une matrice par un scalaire. Ce sont deux opérations différentes avec des propriétés différentes. Le produit par un scalaire est une opération simple à réaliser alors que le produit entre deux matrices est beaucoup plus fastidieux. Nous avons vu que lorsque les matrices étaient particulières alors le produit matriciel devenait plus simple. Les matrices diagonales semblent être des matrices particulièrement adaptées pour faire des produits « simples ».
Une dernière remarque mais non des moindres : prenez garde à faire des opérations « compatibles ». Par exemple, on ne pourra pas faire d'addition entre une matrice et un nombre : $A + 2$ avec A une matrice, n'est pas une opération possible. Si l'on a une matrice et que l'on désire faire une addition alors il faut l'additionner avec une matrice de même dimension.

---

02 LES MATRICES
Puissance d'une matrice et matrice inverse

DÉFINITION
Puissance d'une matrice :

Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.
On définit la matrice $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ n fois.
On convient de noter que $A^0 = I_n$ et $A^1 = A$. En particulier on a $(I_n)^k = I_n$ pour tout entier k.

À VOUS DE JOUER 3

« L'utilisation des propriétés tu apprendras »

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

1. Calculez : $A^2, B^2, AB, BA, A^2 + 2AB + B^2, A^2 - 2AB + B^2$ et $A^2 - B^2$.

2. Calculez : $(A+B)^2, (A-B)^2, (A-B)(A+B)$ et $(A+B)(A-B)$.
Que remarquez-vous ?

3. Développez sans calculer : $(A+B)^2, (A-B)^2, (A-B)(A+B),\ (A+B)(A-B)$

Donnez une condition nécessaire et suffisante sur $A\ et\ B$ pour retrouver les identités remarquables que vous connaissez avec les nombres.

PROPRIÉTÉS

« Le retour du binôme de Newton »

On rappelle que lorsque l'on a deux nombres réels ou complexe a et b et un entier naturel n alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

A-t-on la même expression pour les matrices ? En général non, mais si les matrices commutent alors oui. On retiendra alors la propriété suivante :

Soient A et B des matrices carrées et n un entier naturel. Si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ alors :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Cette formule porte le nom de binôme de Newton pour les matrices.

Appliquons ce calcul.

À VOUS DE JOUER 4

« Déterminer une formule explicite de $\boldsymbol{A^n}$ avec le binôme de Newton tu apprendras »

Remarque : une maitrise des sommes et du symbole Σ est requise pour la dernière question. Pour plus de maitrise, vous pouvez vous entrainer sur les sommes dans le module 1 sur les nombres complexes. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

L'objectif est de déterminer une formule explicite de A^n pour tout entier naturel n.

1.Que vaut A^0 ?

2.On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminez deux réels a et b tels que $A = aJ + bI_3$.

3.Calculez J^2 et J^3 puis conjecturez une formule explicite pour J^n avec $n \geq 1$.

4.Démontrez votre conjecture par récurrence.

5.A l'aide du binôme de Newton, dont vous justifierez la possibilité de son utilisation, déterminez une formule explicite de A^n pour tout entier n.

À VOUS DE JOUER 5

« Par récurrence tu penseras »

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculez M^2, M^3 et M^4

2. Conjecturez une formule pour M^n avec n un entier naturel

3. Démontrez par récurrence votre conjecture.

Maintenant que nous avons vu les opérations entres les matrices et la notion de puissance de matrice intéressons-nous à un nouveau concept : **la matrice inverse.**

DÉFINITION

Inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée. On dit que A est **inversible** si et seulement s'il existe une matrice B telle que $\boldsymbol{AB = BA = I_n}$**.** Dans ce cas la matrice B est unique, on dit que $\boldsymbol{B}$ **est l'inverse de** $\boldsymbol{A}$ et on note $\boldsymbol{B = A^{-1}}$.

Quelques remarques :

Toutes les matrices ne sont pas inversibles. Les matrices inversibles forment un sous-ensemble de l'ensemble des matrices carrées. Par ailleurs, lorsqu'une matrice est inversible alors l'inverse est unique. C'est pourquoi on lui attribue une notation. Ainsi quand on écrira A^{-1}, cela signifiera que A est inversible, que A^{-1} existe et est unique et que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Exemple de matrices inversibles :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible. En effet, considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On a $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc A est inversible et son inverse vaut

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Remarquons que pour les mêmes raisons que B est inversible et que son inverse vaut :

$$B^{-1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Un autre exemple :

La matrice Identité $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est **inversible et son inverse est I_3**.

En effet $I_3 I_3 = I_3 I_3 = I_3$. Cela doit vous faire penser à l'inverse de 1 pour les réels.

Cependant, la matrice nulle $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est **pas inversible**.

En effet quelle que soit la matrice A carrée on a $AO_3 = O_3 A = O_3 \neq I_3$. Il n'existe aucune matrice A tel que le produit avec O_n ne donne la matrice I_n. Ainsi, O_n n'est pas inversible et n'admet donc pas d'inverse. (Cela doit vous faire penser au 0 pour les réels).

La grande différence entre les réels et les matrices se situe dans le fait que pour les réels, le seul élément non inversible est 0 alors que pour les matrices, il existe de nombreuses matrices non inversibles. La question clé est comment savoir si une matrice est inversible ou non et comment déterminer l'inverse d'une matrice inversible.

Nous allons fournir un critère pour les matrices de dimension 2×2.

PROPRIÉTÉS

L'inversion des matrices de dimension 2×2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible si et seulement si le nombre $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas

La matrice inverse de A, notée $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Remarques : Le nombre $ad - bc$ est appelé déterminant d'une matrice 2×2. On le note $\det(A) = ad - bc$. Ainsi, la formule devient $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On retiendra que pour trouver la matrice inverse, il faut **permuter les éléments diagonaux** et **prendre les opposés des termes non diagonaux.**

La notion de déterminant d'une matrice sera approfondie dans le supérieur. Vous apprendrez à calculer des déterminants de matrices de dimensions $n \times n$ avec $n > 2$. Pour une matrice 2×2 : $\det(A) = ad - bc$. Mais plus la matrice aura une taille importante, plus le calcul sera complexe. A titre d'exemple seulement (notions non-exigibles), si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = a(fj - ig) - e(bj - ic) + h(bg - fc)$. On remarque tout de suite le caractère plus compliqué de ce calcul.
Cependant, ce calcul est important car on conserve le critère suivant : A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et ce, quelle que soit la dimension de la matrice.
En terminale, on ne s'intéressera qu'aux formules pour les matrices de taille 2×2. Pour des matrices de dimensions supérieures, vous utiliserez vos calculatrices qui sont capables de vous préciser sur les matrices sont inversibles ainsi que de calculer leurs valeurs.

PROPRIÉTÉS

Propriétés supplémentaires avec l'inverse et la matrice transposée

Soient A et B deux matrices carrées de mêmes dimensions alors :

- $A + B$ est inversible si et seulement si A **et** B sont inversibles. On a dans ce cas,
$$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}.$$
- $A - B$ est inversible si et seulement si A **et** B sont inversibles. On a dans ce cas,
$$(A-B)^{-1} = A^{-1} - B^{-1}.$$
- $aA + bB$, avec a et b des réels non nuls, est inversible si et seulement si A **et** B sont inversibles. On a dans ce cas,
$$(aA+bB)^{-1} = \frac{1}{a}A^{-1} + \frac{1}{b}B^{-1}.$$
- AB est inversible si et seulement si A **et** B sont inversibles. On a dans ce cas,
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (Attention à l'ordre des matrices !)
- A^T est inversible si et seulement si A est inversible. On a dans ce cas,
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$ (Attention à l'ordre des matrices).
- $(AB)^T$ est inversible si et seulement si A **et** B sont inversibles. On a dans ce cas,
$$((AB)^T)^{-1} = ((AB)^{-1})^T.$$
- A^n est inversible si et seulement si A est inversible. On a dans ce cas,
$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. Par convention, on notera : $(A^{-1})^n = A^{-n}$.

Cela fait beaucoup de propriétés d'un coup ! Nous allons maintenant apprendre à les manipuler.

EXERCICE 01 **Inversibilité de matrice**

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Les matrices A et B sont-elles inversibles ? Si oui donnez leurs inverses.

EXERCICES

2. Déterminez : A^T, B^T, AB, BA, $(AB)^T, (BA)^T$ et dites, pour chacune de ces matrices si elle est inversible. Donnez les inverses le cas échéant.

3. Après avoir justifié l'invisibilité, déterminez l'inverse de : $M = 2A^2 - 3(AB^T) + \frac{1}{4}B^2 + (BA)^T$

EXERCICE 02 **Invisibilité et puissance à savoir refaire.**

On considère $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrez que P et inversible et déterminer P^{-1}.

2. Calculez $P^{-1}AP$.

3. En déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 03 **Autre technique pour l'inversibilité**

On donne $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculez M^2 et M^3.

EXERCICES

2. Calculez $M^3 - M^2 - 8M$.

3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

Nous avons assez d'outils pour nous servir des matrices dans diverses situations mathématiques. Intéressons-nous à ces utilisations.

03 LES MATRICES
Matrices et transformations géométriques

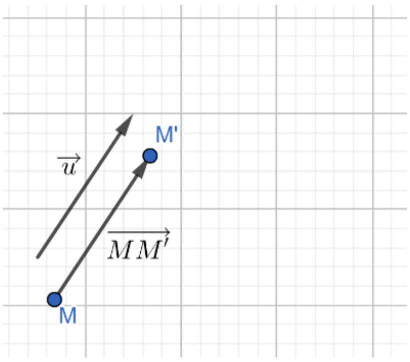
Nous allons en particulier nous servir de l'outil matriciel pour faire de la géométrie. Plus exactement, nous allons modéliser quelques transformations géométriques à l'aide de matrices. Réaliser une transformation géométrique reviendra à multiplier par une matrice. Réciproquement, nous pourrons interpréter certaines matrices par des transformations géométriques.

Dans toute cette partie, nous travaillerons dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Considérons un point $M(x;y)$ et un point $M'(x';y')$. Nous dirons que M' est l'image du point M par une transformation géométrique. Le but de l'exercice est de trouver le lien entre les coordonnées de M' et celles de M en fonction de la transformation géométrique considérée.

Plusieurs propriétés vont être vues.

PROPRIÉTÉ
La translation de vecteur $\vec{u}(a;b)$:

On dit que $M'(x';y')$ est l'image du point $M(x;y)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(a;b)$ si et seulement si $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} = \vec{\boldsymbol{u}}$. Voici un schéma d'une telle transformation :



Nous remarquons bien que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}$ « sert » à transformer un point M en son image M'. On dit que l'on a translaté M en M'. Le verbe « translater » est un synonyme de déplacer. Le vecteur $\vec{u}$ donne le sens, la direction et la longueur du déplacement.
Si nous connaissons les coordonnées de $M(x\,;y)$ et de $\vec{u}(a\,;b)$ alors nous en déduisons celles de $M'(x'\,;y')$ par la relation : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$. Cette relation pourra s'écrire « matriciellement » :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

Où : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est la matrice colonne associée au point $M'(x',y')$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la matrice colonne associée au point $M(x,y)$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est la matrice colonne associée au vecteur $\vec{u}(a,b)$. Retenons l'idée sous-jacente : On peut, pour chaque point et chaque vecteur, associer une matrice colonne. Cette matrice colonne sera simplement la matrice composée des coordonnées des points et des vecteurs qui lui sera associée.

Exemple : Si $M(1;2)$ et que l'on souhaite calculer l'image M' du point M par la translation de vecteur $\vec{u}(3,1)$, il suffit d'utiliser la relation :

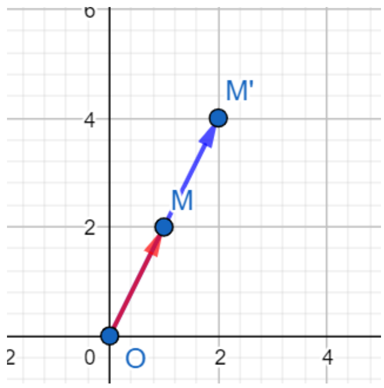
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Donc $M'(4;3)$ ce qui veut dire que $x' = 4$ et $y' = 3$.

PROPRIÉTÉ

L'homothétie de centre $\boldsymbol{O(0;0)}$ et de rapport k :

On rappelle qu'une homothétie consiste à « étirer » ou « raccourcir » un vecteur. On dit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre $O(0;0)$ et de rapport k si et seulement si $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ avec k un réel.



Voici un schéma illustrant une homothétie de centre $O(0,0)$ et de rapport $k = 2$. On a $\overrightarrow{OM'} = 2\,\overrightarrow{OM}$. On comprend que l'on a « étiré » le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pour le transformer en vecteur $\overrightarrow{OM'}$. En termes de coordonnées, nous avons la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

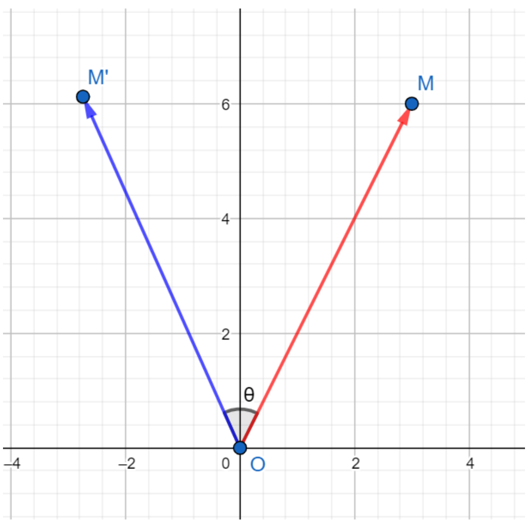
Nous retiendrons que pour trouver les coordonnées du points image M', il suffit de multiplier les coordonnées de M par une matrice carrée de dimension 2×2. Cette matrice dans le cadre d'une l'homothétie de centre $O(0;0)$ et de rapport k est : $\boldsymbol{H_k} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$.

Réciproquement, une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$ peut être interprétée comme représentant une homothétie de centre $O(0,0)$ et de rapport k.

PROPRIÉTÉ

La rotation de centre $\boldsymbol{O(0;0)}$ et d'angle $\boldsymbol{\theta}$.

On dit que M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est le résultat du vecteur $\overrightarrow{OM}$ après l'avoir tourné autour de $O(0,0)$ d'un angle θ.
Voici un schéma pour illustrer ce propos :



On constate que pour passer de M à M', on a tourné le vecteur $\overrightarrow{OM}$ d'un angle θ autour de $O(0,0)$.
C'est cela qu'on nomme : rotation de centre O et d'angle θ.
Pour déterminer les coordonnées de M' en fonction de celles de M, il suffit d'appliquer le calcul matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{cos(\theta)} & \boldsymbol{-sin(\theta)} \\ \boldsymbol{sin(\theta)} & \boldsymbol{cos(\theta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

Attention au signe – qui apparait au niveau du coefficient $a_{1,2}$. La matrice $\boldsymbol{R_\theta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{cos(\theta)} & \boldsymbol{-sin(\theta)} \\ \boldsymbol{sin(\theta)} & \boldsymbol{cos(\theta)} \end{pmatrix}$ peut être interprété comme représentant une rotation de centre $O(0,0)$ et d'angle θ.

Exemple de calculs :

Si on considère le point $M(1,2)$ et que l'on cherche les coordonnées du point M' image de M par la rotation de centre $O(0,0)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$. Alors, en utilisant la relation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{3}) & -sin(\frac{\pi}{3}) \\ sin(\frac{\pi}{3}) & cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

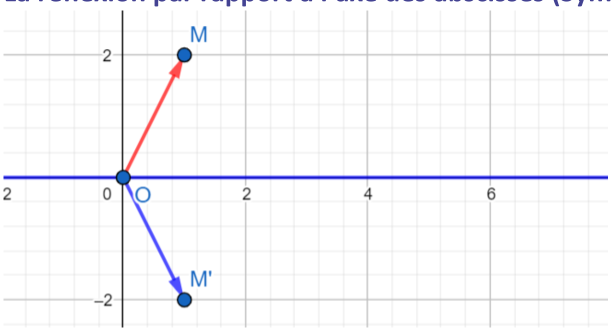
Donc $x' = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$ et $y' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ et donc $M'(\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1)$.

PROPRIÉTÉS

Les symétries particulières :

Parmi toutes les symétries, certaines sont plus intéressantes que les autres :

La réflexion par rapport à l'axe des abscisses (Symétrie axiale d'axe des abscisses) :



La matrice associée à cette réflexion particulière sera :

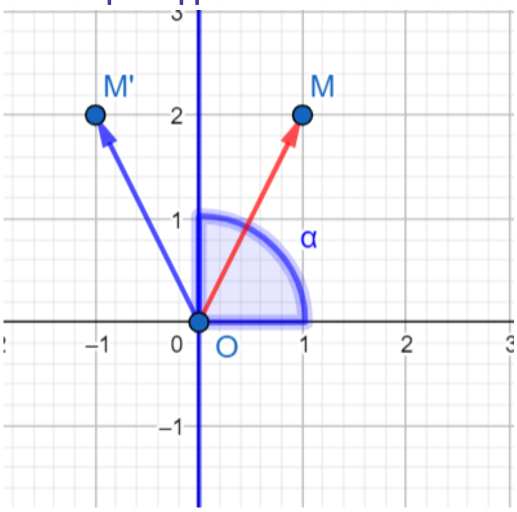
$$S_{(Ox)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple : Pour $M(1; 2)$

on a $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

On retrouve bien $x' = 1$ et $y' = -2$ donc $M'(1; -2)$

La réflexion par rapport à l'axe des ordonnées (symétrie axiale d'axe des ordonnées) :



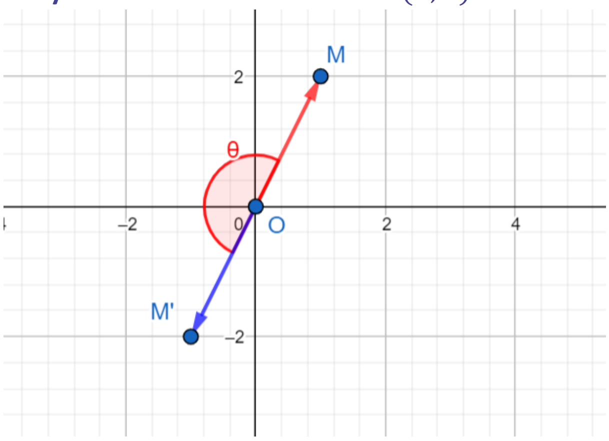
$$S_{(Oy)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple : pour $M(1; 2)$ on a

$M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On retrouve bien $x' = -1$ et $y' = 2$ donc $M'(-1; 2)$

La symétrie centrale de centre $\boldsymbol{O(0,0)}$:



On observe que faire une symétrie centrale de centre O revient à faire une **rotation d'angle $\boldsymbol{\pi}$ et de centre $\boldsymbol{O}$.**

La matrice associée à cette transformation est donc :

$$S_O = R_\pi = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $R_\pi = H_{-1}$. Ainsi faire une rotation d'angle π et de centre O c'est équivalent que de faire une homothétie de rapport $k = -1$ et de centre O.

Synthèse :
Il faut connaitre les matrices associées aux transformations géométriques et comment les utiliser pour déterminer les coordonnées des points images.

Transformation Géométrique	Matrice associée	Relation pour trouver M'
Translation de vecteur $\vec{u}(a,b)$	$\boldsymbol{T_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$	$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T_{(a,b)}}$
Homothétie de centre O et de rapport k	$\boldsymbol{H_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}$	$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = H_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$
Rotation de centre O et d'angle θ	$\boldsymbol{R_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}}$	$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$
Symétrie axiale d'axe des abscisses	$\boldsymbol{S_{(0x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$	$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_{(ox)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$
Symétrie axiale d'axe des ordonnées	$\boldsymbol{S_{(oy)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$	$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_{(oy)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$
Symétrie centrale de centre O	$\boldsymbol{S_O = R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H_{-1}}$	$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H_{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$

PROPRIÉTÉS
Succession de transformations géométriques

Nous venons de voir les matrices associées à chaque transformation élémentaire. Si nous désirons déterminer les coordonnées d'un point M' image de M par une succession de transformations, il suffit de reprendre les transformations élémentaires **dans l'ordre** et d'appliquer la relation correspondante à chaque étape.

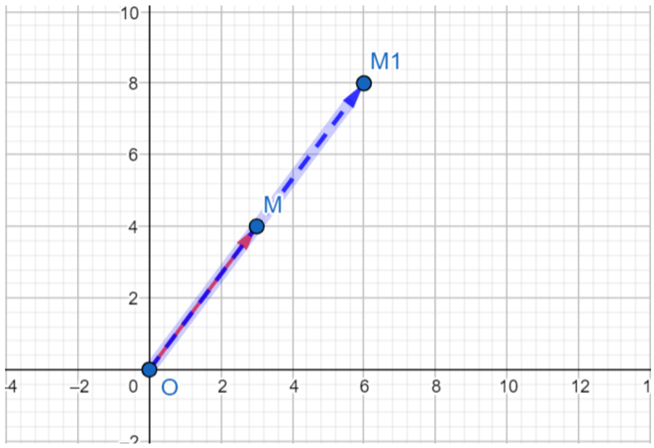
Intéressons-nous à l'exemple suivant.

Soit la succession de transformations géométriques suivante :

- Etape 1 : on réalise une homothétie de centre O et de rapport $k = 2$.
- Etape 2 : on réalise une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- Etape 3 : on réalise une translation de vecteur $\vec{u}(4\,;5)$.
- Etape 4 : on termine par une symétrie centrale de centre O.

Pour déterminer alors les coordonnées du point M' image du point $M(x,y)$ par la suite de transformations décrites, il suffit d'écrire **les matrices associées à chaque transformation.**
Avant de commencer les calculs, montrons comment cela se passe par les schémas :
On notera $M, M_1, M_2 \dots M_4$ les points issus de chaque étape. Ainsi M_1 correspondra à l'image de M à la fin de l'étape 1 et ainsi de suite.

On obtient alors :

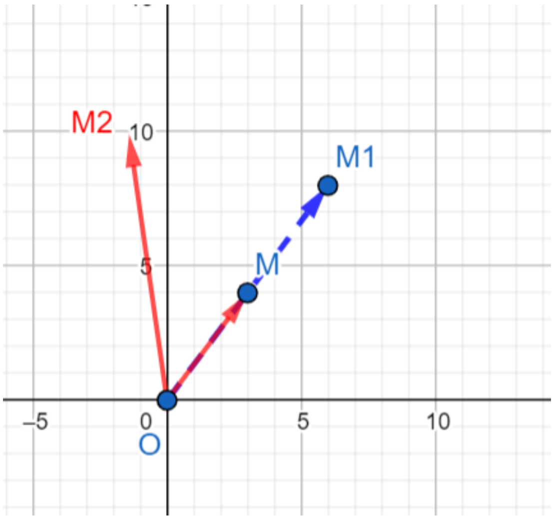


A la fin de l'étape 1 :

On réalise une homothétie de centre O et de rapport $k = 2$.

La matrice associée à cette transformation élémentaire vaut $H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En notant $M_1(x_1; y_1)$, on a alors $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = H_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

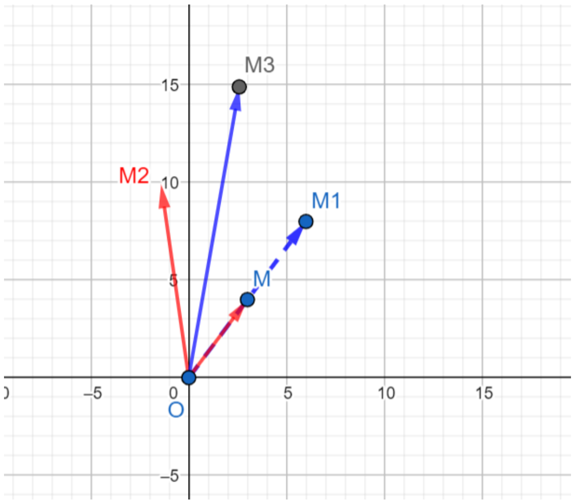


A la fin de l'étape 2 :

On obtient M_2 en réalisant une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ sur $\boldsymbol{M_1}$. En effet, M_2 est l'image de M_1 donc il faut appliquer la relation de transformation sur les coordonnées de M_1. Il vient alors, en notant $M_2(x_2; y_2)$.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Avec la matrice, $R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

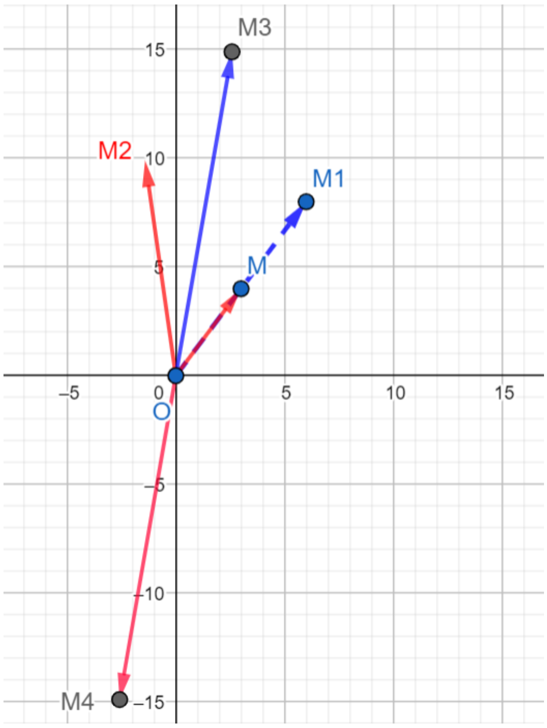


A la fin de l'étape 3 :

On obtient M_3 en réalisant une translation de vecteur $\vec{u}(4\,;5)$ sur $\boldsymbol{M_2}$. En effet, M_3 est l'image de M_2 donc il faut appliquer la relation de transformation sur les coordonnées de M_2. Il vient alors, en notant $M_3(x_3; y_3)$.

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + T_{4,5}$$

Avec $T_{4,5} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$



A la fin de l'étape 4 :

On obtient M_4 en réalisant une symétrie centrale de centre O sur M_3. En effet, M_4 est l'image de M_3 donc il faut appliquer la relation de transformation sur les coordonnées de M_3. Il vient alors, en notant $M_4(x_3; y_3)$.

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = S_O \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Avec $S_O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Finalement, en reprenant toutes les transformations, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = S_O \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = S_O \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + T_{4,5} \right) = S_O \left(R_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T_{4,5} \right) = S_O . \left(R_{\frac{\pi}{4}} . H_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T_{4,5} \right)$$

Il ne reste plus qu'à calculer la matrice « transformation totale » :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x\sqrt{2} - y\sqrt{2} \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 4 \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - 4 \\ -x\sqrt{2} - y\sqrt{2} - 5 \end{pmatrix}$$

Par exemple, pour le point $M(3,4)$ on obtient $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4 \\ -3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 4 \\ -7\sqrt{2} - 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2{,}58 \\ -14{,}89 \end{pmatrix}$$

Ainsi le point $M'(\sqrt{2} - 4; -7\sqrt{2} - 5)$.

EXERCICE 04 **On réalise une succession de transformations géométriques.**

Soit un point $M(x, y)$ déterminez les coordonnées de $M'(x', y')$ en fonction de x et y où M' est l'image de M par la suite de transformations suivantes :

Une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, une homothétie de centre O et de rapport $k = -3$, une symetrie axiale d'axe des abscisses, une symétrie centrale puis une translation de vecteur $\vec{u}(2; 3)$.

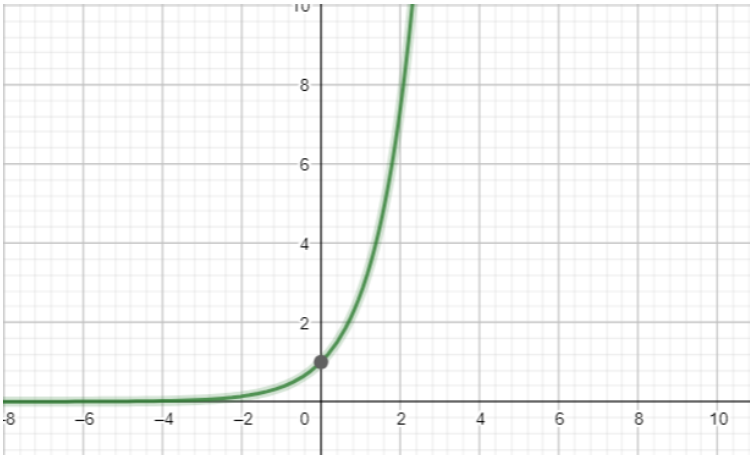
1. Déterminez les coordonnées du point image de $M(1,2)$.

2. Déterminez l'ensemble image des points qui sont situés sur l'axe des abscisses.

3. Déterminez l'ensemble image des points qui sont situés sur l'axe des ordonnées.

EXERCICE 05 Avec les fonctions cela fonctionne aussi !

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x) = e^x$ dont voici la courbe C_f :



Considérons les point $M(x, y)$ situés sur la courbe C_f.

1. Ecrivez y en fonction de x pour les points M de C_f.

2. Quel est l'ensemble décrit par $M'(x'; y')$ tel que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$? Le représenter.

3. Soit $M''(x'' ; y'')$ le point qui décrit la courbe associée à la fonction g définie par $g(x) = -e^{x}$.
Représentez cette courbe et déterminez la matrice A telle que $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Nous allons voir maintenant une autre application des matrices en lien avec les systèmes d'équations linéaires.

LES MATRICES
Matrices et Systèmes

Dans cette partie nous n'étudierons que des systèmes linéaires qui ont autant d'équations que d'inconnues. La plupart du temps, il y aura deux équations à deux inconnues ou trois équations à trois inconnues. Les cas des systèmes linéaires où le nombre d'inconnues n'est pas égal au nombre d'équations sera étudié dans le supérieur.

DÉFINITION
Les systèmes linéaires à deux équations et deux inconnues.

Considérons deux inconnues : x et y.
Un système linéaire à deux équations et deux inconnues est un système de la sorte :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Avec les $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 2}}$ qui sont des constantes réelles et les $(b_i)_{1\leq i\leq 2}$ aussi. Les $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 2}}$ sont appelés les coefficients du système et les $(b_i)_{1\leq i\leq 2}$ les second membre.

On remarque une forte analogie avec les matrices que l'on va justement exploiter.

PROPRIÉTÉS
Les systèmes linéaires à deux équations et deux inconnues sont équivalents à une équation matricielle.

En effet en Posant la matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 2}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ qui est la matrice des coefficients.

La matrice colonne $B = (b_i)_{1\leq i\leq 2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors le système :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Lorsque l'on dit qu'ils sont équivalents, cela signifie qu'ils ont les mêmes solutions. Finalement, résoudre un système d'équations linéaire revient à résoudre une équation matricielle, le but étant de trouver les inconnues c'est-à-dire la matrice colonne X.

DÉFINITION
Les systèmes linéaires à trois équations et trois inconnues.

De manière analogue, un système linéaire de trois équations à trois inconnues est un système qui s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Avec (x, y, z) les inconnues, $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}$ qui sont les coefficients et les $(b_i)_{1\leq i\leq 3}$ le second membre.

PROPRIÉTÉS

Les systèmes linéaires à trois équations et trois inconnues sont équivalents à une équation matricielle.

De manière tout à fait analogue en notant :

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 3}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ qui est la matrice des coefficients. La matrice colonne

$B = (b_i)_{1\leq i\leq 2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors le système :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{31}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Le but étant de trouver des solutions, il faudra alors déterminer la matrice colonne X.

On peut généraliser le concept à autant d'inconnues et d'équations que souhaitées. Finalement, un système linéaire est équivalent à une équation matricielle où la matrice A est une matrice carrée qui comportera tous les coefficients du système, la matrice colonne X comportera toutes les inconnues et la matrice colonne B sera la matrice des seconds membres.

PROPRIÉTÉS

Un système linéaire admettra une solution unique si et seulement si la matrice des coefficients A est inversible. Dans ce cas alors la matrice X recherchée vaudra : $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$

Nous avons un critère très performant pour vérifier si un système admet une unique solution. Cela est lié à l'invisibilité de la matrice A. Mieux ! nous avons une formule pour trouver la solution par $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$**.**

Exemple : considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Pour le résoudre, on peut soit utiliser une méthode de résolution classique vue en Seconde…. Soit, on peut utiliser les matrices :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B$$

Avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le système admet une solution si et seulement si A est inversible.

Or A est inversible, si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Or pour une matrice 2×2 :

$$\det(A) = 4 \times 3 - 2 \times 2 = 12 - 4 = 8 \neq 0$$

Le système admet donc une unique solution et la solution vaut :

$$X = A^{-1}B$$

Il nous faut alors calculer A^{-1}. Pour une matrice 2×2, nous pouvons utiliser la formule suivante : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Or, voici la notation pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On en déduit donc que : $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

La solution recherchée est : $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

En reprenant la définition de X, on peut conclure que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{7}{8} \text{ et } y = -\frac{1}{4} \text{ et donc } S = \left\{\left(\frac{7}{8} ; -\frac{1}{4}\right)\right\}.$$

EXERCICE 06

Faisons des estimations

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agence immobilier dans toute la France. Depuis 2010, le nombre d'agence n'a fait qu'augmenter. Ainsi l'entreprise, qui comptait 10 agences en 2010, est passée à 50 agences en 2015 puis à 170 en 2020 ! L'entrepreneur désire pouvoir estimer le nombre d'agences qu'il aura en 2030 si la tendance se confirme. Pour cela il modélise le nombre d'agences en dizaines par une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois constantes réelles et x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010.

1. Traduisez les données de l'énoncé par un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues : a, b, c.

2. Convertissez ce système en équation matricielle sous la forme $AX = B$ avec A la matrice des coefficients du système, X la matrice des inconnues et B la matrice du second membre.

3. Résolvez le système à l'aide de la calculatrice.

4. Répondez à la question que se pose l'entrepreneur en faisant l'hypothèse que la tendance se confirme.

EXERCICE 07 **Avec la géométrie dans l'espace (Attention il faut connaitre les équations cartésiennes de plan dans l'espace).**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère trois points

$$A(1;5;-2), B(7;-1;3), C(-2;7;-2).$$

On veut démontrer que ces trois points ne sont pas alignés et qu'ils forment donc un plan (ABC) que l'on notera P. On cherche une équation cartésienne de ce plan sous la forme $ax+by+cz=73$. Le but de cet exercice est de trouver les valeurs de a, b, c.

1.Déterminez un système linéaire de trois équations à trois inconnues, grâce aux données de l'énoncé.

2.Transformez le système (S) en équation matricielle.

3.Résolvez (S).

4.En déduire si le plan P_1 d'équation cartésienne $2x + 3y - z = 5$ est sécante ou parallèle à P.

Reste à voir un cas très important d'utilisation du calcul matriciel : pour des phénomènes qui sont des séquences dont un résultat dépend du résultat précèdent, nous allons analyser le thème des **Suites de Matrices Colonnes.**

LES MATRICES
Suite de Matrices Colonnes

Voici un chapitre clé. Beaucoup de situations décrivent des séquences temporelles dont le résultat à l'instant n dépend du résultat à l'instant d'avant.
Ces situations, peuvent très souvent se modéliser en suite de **matrices colonnes**. Nous allons analyser cet aspect particulier des matrices afin de pouvoir l'appliquer dans un nombre conséquent de situations.

DÉFINITION

Une suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ est une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour chaque n le terme de rang n est une matrice colonne de taille $k \times 1$.

Exemple :

Considérons la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n entier par $U_n = \begin{pmatrix} n^2 \\ n-1 \end{pmatrix}$.
Nous venons de définir une suite de matrices colonnes. Ainsi :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que chaque terme de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une matrice colonne de taille 2×1. Remarquez que l'on aura tendance à écrire en majuscule afin de ne pas confondre avec les suites de nombres réel.
La suite, ainsi définie, est une suite de matrices colonnes définie de **manière explicite.** Sachez qu'en mathématiques, ceci est considéré comme le graal ! Vos exercices ne donneront malheureusement jamais une suite de matrices colonnes définies de manière explicite.

Comme pour les suites de nombres réel, il y a deux manières de définir une suite de matrices colonnes : de manière explicite, comme nous avons dans l'exemple, ou bien par récurrence. Le programme s'intéresse à deux relations de récurrence en particulier : les suites de la forme $U_{n+1} = AU_n$ et les suites de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$. Définissons-les.

DÉFINITION

Définition par récurrence d'une suite de matrice colonnes :

- **Les suites de la forme $U_{n+1} = AU_n$**

Soit A une matrice carrée d'ordre k et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = AU_n \end{cases}$$

Exemple :

soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut définir, **par récurrence** la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ U_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} U_n \end{cases}$$. Cette suite est une suite de matrices colonnes.

DÉFINITION

- **Les suites de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$**

Soit A une matrice carrée d'ordre k, B une matrice colonne de dimension $k \times 1$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ définie par : $\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}$

Exemple :

soit A la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ on peut définir, **par récurrence** la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \\ U_{n+1} = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} U_n + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{cases}.$$ Cette suite est une suite de matrices colonnes.

Evidemment, on peut définir des suites de matrices colonnes par récurrence autrement que par ces deux relations. Cependant, le programme se concentre sur celles-ci car elles sont intéressantes et permettent de modéliser un nombre conséquent de phénomènes. Le grand problème des définitions par récurrence est le calcul des termes de rang élevé. En effet, si on veut déterminer U_{1000}, il faudra calculer tous les termes antérieurs. Le calcul est fastidieux car il demande de calculer des produits de matrices qui sont d'autant plus complexes que les matrices sont de grandes tailles. Il nous faut pouvoir accéder à des expressions **explicites** comme l'on fait pour les suites de nombres réels.

PROPRIÉTÉS

Propriété : **Forme explicite des suites de la forme** : $\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = AU_n\end{cases}.$

Soit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices colonnes définie par $\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = AU_n\end{cases}$ avec U_0 une matrice colonne et A une matrice carrée. Alors, pour tout n entier : $\boldsymbol{U_n = A^n U_0}$.

DÉMONSTRATION

Cette démonstration est donnée car elle est souvent attendue dans les exercices.
On démontre seulement cette formule par récurrence.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a $A^0 U_0 = I_k U_0 = U_0$ donc la propriété est vérifiée au rang 0.

Hérédité :
Supposons qu'il existe un rang n tel que $U_n = A^n U_0$. Montrons alors que $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$.
On sait, par définition, que : $U_{n+1} = AU_n$. Or, par hypothèse de récurrence, $U_n = A^n U_0$. Nous pouvons donc écrire que : $U_{n+1} = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$. La propriété est donc héréditaire. Nous venons dons de démontrer par récurrence que pour tout entier n $U_n = A^n U_0$.

Remarque :
Cette formule doit vous faire penser aux suites géométriques. En effet, lorsque $u_{n+1} = qu_n$, alors $u_n = u_0 q^n$. L'analogie permet de considérer la matrice A est un peu comme la « raison » des suites de matrices colonnes. On fera bien attention à l'ordre des termes dans l'écriture : $U_n = A^n U_0$ et **non** $U_n = U_0 A^n$ car dans ce dernier cas, le produit est impossible !

Nous venons de voir que si une suite de matrices colonnes était définie par récurrence par la relation $U_{n+1} = AU_n$, alors $U_n = A^n U_0$. Bien que cette forme soit pratique, le travail n'est pas terminé pour autant. En effet, il faut encore travailler pour avoir une forme explicite de A^n et nous avons vu dans les exercices sur les puissances de matrices qu'il n'est pas si aisé d'être capable de trouver des formes explicites de A^n.

Intéressons-nous à la forme explicite des suites de la forme $U_n = AU_n + B$.
L'étude des suites de matrices colonnes, ayant cette forme, est plus complexe et vous serez en permanence guidé dans les exercices. Cependant, nous allons donner la démarche car les questions seront toujours les mêmes.

DÉFINITION

Etat stable d'une suite de matrice colonnes :

Soit U une matrice colonne et la suite (U_n) de matrices colonnes définie par la relation de récurrence : $U_n = AU_n + B$. On dit que U est un état stable si et seulement si $\boldsymbol{U = AU + B}$.

Remarquons qu'un état stable est une matrice colonne. On dit qu'il s'agit d'un état stable car s'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n = U$ alors $U_{n+1} = AU_n + B = AU + B = U$. Ainsi, la suite de matrices colonnes vaudra toujours U à partir du rang n et ne sera plus modifiée. Il s'agit donc d'une suite constante qui vaut l'état stable U par partir du rang n.

La question que l'on peut se poser est : existe-t-il toujours un état stable ? La réponse est non en général. Mais il existe un critère d'existence et le voici :

PROPRIÉTÉ

Existence d'état stable pour les suites de la forme $\boldsymbol{U_n = AU_n + B}$

Il existe un état stable si la matrice $\boldsymbol{I - A}$ est inversible et dans ce cas l'état stable vaut :

$$\boldsymbol{U = (I - A)^{-1}B}$$

PROPRIÉTÉ

Forme explicite de (U_n) vérifiant la relation $U_{n+1} = AU_n + B$ et admettant un état stable :

Soit U un état stable de la suite de matrices colonnes définie par $U_{n+1} = AU_n + B$. Alors la suite de matrices colonnes (V_n) définie par $V_n = U_n - U$ vérifie la relation de récurrence $V_{n+1} = AV_n$. Dans ce cas $\boldsymbol{U_n = A^n(U_0 - U) + U}$.

notions clés

DÉMONSTRATION

Démontrons ce résultat car **c'est une question souvent posée en exercice :**

On a par définition : $V_{n+1} = U_{n+1} - U = AU_n + B - (AU + B)$ car $U_{n+1} = AU_n + B$ et $U = AU + B$

Donc $V_{n+1} = AU_n + B - AU - B = AU_n - AU = A(U_n - U) = AV_n$.

Nous remarquons que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - U$ vérifie une relation de récurrence que l'on connait à savoir $V_{n+1} = AV_n$. Nous pouvons alors utiliser les résultats précédents et déterminer une forme explicite de (V_n) puis de (U_n) :

Sachant que $V_{n+1} = AV_n$ alors $V_n = A^nV_0 = A^n(U_0 - U)$

Et comme $V_n = U_n - U$ alors $U_n = V_n + U$ et donc $\boldsymbol{U_n = A^n(U_0 - U) + U}$

Finalement, dans le cas où il existe un état stable U alors la suite U_n a pour forme explicite

$$\boldsymbol{U_n = A^n(U_0 - U) + U}$$

Retenez bien cette manière de démontrer car cela sera demandé dans les exercices utilisant les suites de matrices colonnes. Remarquez qu'il faudra encore travailler pour obtenir une forme explicite de A^n mais cela sera guidé dans l'exercice et vous vous êtes déjà entrainer dans la partie puissance de matrice.

« APPRENDRE À ÉTUDIER UNE SUITE DE MATRICE COLONNE DU SAURAS »

méthodos clés bac

C'est un type d'exercice très courant au bac. Donc partons sur un exercice type et décortiquons-le :

Exercice : pour faire des estimations et des projections

Un opérateur A souhaite prévoir l'évolution du nombre de ses abonnés par rapport à son principal concurrent B à partir de la fin de l'année 2020. A la fin de l'année 2020, les opérateur A et B ont chacun 300 000 abonnées.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n et b_n le nombre d'abonnés des opérateurs A et B à la fin de l'année $2020 + n$.
Ainsi $a_0 = b_0 = 300$. Des études conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}6b_n + 70 \end{cases}$$

1. Montrer que ce système est équivalent à une suite de matrices colonne (U_n) définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$, vous expliciterez les matrice A, B et U_0.

Réponse :

Le système peut se réécrire ainsi : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$. En posant $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

On obtient une relation de récurrence de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$ et on obtient alors $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer U_1 et en déduire le nombre d'abonnés des opérateurs A et B à la fin de l'année 2021.

Réponse :

$$U_1 = AU_0 + B = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 210 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}$$

A la fin de l'année 2021 l'opérateur A aura 330 000 abonnés et l'opérateur B en aura 280 000.

3. La suite (U_n) admet-elle un état stable que l'on notera U? Si oui, expliciter U

Réponse :

Méthode 1 : calculons la matrice $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. On a $\det(I - A) = 0{,}3 \times 0{,}4 - 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}1 \neq 0$ donc $I - A$ est inversible et la suite (U_n) admet un état stable U qui vaut $U = (I - A)^{-1}B = \frac{1}{0{,}1} \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

Méthode 2 : soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $U = AU + B$ alors on doit avoir :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7x + 0{,}2y + 60 \\ 0{,}1x + 0{,}6y + 70 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}7x + 0{,}2y + 60 \\ y = 0{,}1x + 0{,}6y + 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}3x - 0{,}2y = 60 \\ -0{,}1x + 0{,}4y = 70 \end{cases}$$

Il suffit de résoudre le système : soit on utilise le cours sur la résolution de système à l'aide de matrices, soit on peut le résoudre directement à la main.

Je vous propose de le résoudre directement : on peut multiplier la ligne 2 par 3. On obtient alors le système : $\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}2y = 60 \\ -0{,}3x + 1{,}2y = 210 \end{cases}$ puis on additionne les deux lignes. On obtient : $\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}2y = 60 \\ y = 270\ (L_1 + L_2) \end{cases}$

Finalement en remplaçant la valeur de $y = 270$ dans la ligne 1, il vient directement : $\begin{cases} x = 380 \\ y = 270 \end{cases}$.

Finalement : si $U = AU + B$ alors $U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$. Il faut vérifier la réciproque, c'est-à-dire, si $U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$ alors $AU + B = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \times 380 + 0{,}2 \times 270 + 60 \\ 0{,}1 \times 380 + 0{,}6 \times 270 + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} = U$. Il existe donc un unique état stable qui vaut $U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

Choisissez la méthode que vous préférez pour déterminer l'état stable. Attention à ne pas oublier la réciproque dans le cas de la méthode 2.

4. On définit la suite (V_n) par $V_n = U_n - U$
   a. Montrer que $V_n = AV_n$

Réponse :
$V_{n+1} = U_{n+1} - U = AU_n + B - (AU + B)$ car $U_{n+1} = AU_n + B$ et $U = AU + B$
Donc $V_{n+1} = AU_n + B - AU - B = AU_n - AU = A(U_n - U) = AV_n$.

   b. **En déduire que $V_n = A^n V_0$**

Réponse : une récurrence s'impose
Montrons par récurrence que pour tout n entier $V_n = A^n V_0$:

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a $A^0 V_0 = I_k V_0 = V_0$ donc la propriété est vérifiée au rang 0.

Hérédité :
Supposons qu'il existe un rang n tel que $V_n = A^n V_0$. Montrons alors que $V_{n+1} = A^{n+1} V_0$.
On sait par définition que : $V_{n+1} = VU_n$ or par hypothèse de récurrence $V_n = A^n V_0$. Nous pouvons donc écrire que : $V_{n+1} = AA^n V_0 = A^{n+1} V_0$. La propriété est donc héréditaire. Nous venons donc de démontrer par récurrence que pour tout entier n $V_n = A^n V_0$.

   c. Montrer que pour tout n entier, $V_n = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$

Réponse : une nouvelle récurrence est attendue.

Montrons par récurrence, que pour tout entier n, $V_n = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$

Initialisation : pour $n = 0$, on a par définition que

$$V_0 = U_0 - U = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Or, en remplaçant $n = 0$ dans la matrice, il vient :

$$\begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^0 - \frac{140}{3} \times 0{,}5^0 \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^0 + \frac{140}{3} \times 0{,}5^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} - \frac{140}{3} \\ -\frac{50}{3} + \frac{140}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{240}{3} \\ \frac{90}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ 30 \end{pmatrix} = V_0$$ donc la propriété est initialisée.

<u>Hérédité :</u>
Supposons qu'il existe un entier n tel que

$$V_n = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$$

Montrons alors que :

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^{n+1} - \frac{140}{3} \times 0{,}5^{n+1} \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^{n+1} + \frac{140}{3} \times 0{,}5^{n+1} \end{pmatrix}$$

On sait que

$$\begin{aligned} V_{n+1} = AV_n &= \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}7 \times \left(-\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n\right) + 0{,}2 \times \left(-\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n\right) \\ 0{,}1 \times \left(-\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n\right) + 0{,}6 \times \left(-\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}8^n \times \left(-\frac{100}{3} \times 0{,}7 - 0{,}2 \times \frac{50}{3}\right) + 0{,}5^n \times \left(-\frac{140}{3} \times 0{,}7 + \frac{140}{3} \times 0{,}2\right) \\ 0{,}8^n \times \left(-\frac{100}{3} \times 0{,}1 - \frac{50}{3} \times 0{,}6\right) + 0{,}5^n \times \left(-\frac{140}{3} \times 0{,}1 + \frac{140}{3} \times 0{,}6\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n \times (0{,}7 + 0{,}1) - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \times (0{,}7 - 0{,}2) \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^n \times (0{,}2 + 0{,}6) + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \times (-0{,}1 + 0{,}6) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^{n+1} - \frac{140}{3} \times 0{,}5^{n+1} \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^{n+1} + \frac{140}{3} \times 0{,}5^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire et nous venons de montrer par récurrence que, pour tout entier n,

$$V_n = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$$

5. En déduire une forme explicite de la suite (U_n)

<u>Réponse :</u>

On sait que $U_n = V_n + U = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380 \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 270 \end{pmatrix}$

6. En déduire que la suite (U_n) converge et donner sa limite ? Que remarquez-vous ?

Réponse :
Comme $-1 < 0{,}8 < 1$ et $-1 < 0{,}5 < 1$, en utilisant les propriétés des limites des suites de la forme q^n, il vient que $0{,}8^n$ tend vers 0 et $0{,}5^n$ tend vers 0 également. En faisant la limite il vient alors que la suite (U_n) tend vers :$\begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} = U$.
Nous remarquons que la suite converge vers un état stable. Cela sera toujours le cas, lorsque la suite est convergente alors sa limite est nécessairement un état stable.

7. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

Réponse :
À long terme, signifie lorsque n devient très grand, le nombre d'abonnée de l'opérateur A va s'équilibrer et tendre vers $380\,000$ abonnés et l'opérateur B aura un nombre d'abonnés tendant vers $270\,000$.
Conclusion : entrainez-vous à faire et refaire cet exercice très complet qui est très important et souvent demandé en examen.

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux. Pour tout entier naturel n, on note j_n et a_n les nombre d'animaux jeunes et adultes après n années d'observations. On compte la première année, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.

Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$. Les démographes ont modélisé l'évolution des populations par les relations :

$$\begin{cases} j_{n+1} = 0{,}125 j_n + 0{,}525 a_n \\ a_{n+1} = 0{,}625 j_n + 0{,}625 a_n \end{cases}$$

1. Montrez que le système est équivalent à une suite de matrices colonne (U_n) définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n$, vous expliciterez les matrice A et U_0.

2. Calculez U_1 et U_2. Les résultats seront arrondis à l'unité près par défaut.

3. Exprimez U_n en fonction de A^n et U_0.

4. On Pose $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrez que Q est inversible et calculer Q^{-1}.

b. Montrez que $A = QDQ^{-1}$.

c. Montrez que $A^n = QD^nQ^{-1}$ et calculer alors A^n en fonction de n.

d. Déduisez j_n et a_n en fonction de n.

e. Déterminez les limites des suites (j_n) et (a_n).

f. Que peut-on en conclure quant à la population d'animaux étudiée ?

CORRECTION :

1. Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définie par, pour tout entier n, $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$ alors par définition :

$U_{n+1} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ et le système $\begin{cases} j_{n+1} = 0{,}125 j_n + 0{,}525 a_n \\ a_{n+1} = 0{,}625 j_n + 0{,}625 a_n \end{cases}$ se réécrit à base de matrice :

$$\begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n \text{ Avec } A = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix}.$$

2. Nous avons :

$$U_1 = AU_0 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 288 \\ 438 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = AU_1 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 288 \\ 438 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 266 \\ 454 \end{pmatrix}$$

3. La suite (U_n) est définie matriciellement par $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$.

4. a. $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ donc $\det(Q) = 7 \times 5 - 3 \times (-5) = 50 \neq 0$

On conclut donc que Q est inversible et $Q^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

4. b. Il suffit de calculer le produit

$$QDQ^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -1{,}75 & 3 \\ 1{,}25 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 6{,}25 & 26{,}25 \\ 31{,}25 & 31{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} = A$$

4. c. On démontre par récurrence que pour tout entier n, $A^n = QD^nQ^{-1}$.
Initialisation :
Pour $n = 0$ on a d'une part que $A^0 = I$ et d'autre part que $QD^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I$ donc $A^0 = QD^0Q^{-1}$.
Hérédité :
Supposons qu'il existe un entier n tel que $A^n = QD^nQ^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = QD^{n+1}Q^{-1}$. On sait que $A^{n+1} = AA^n = AQD^nQ^{-1}$ par hypothèse de récurrence. Or $A = QDQ^{-1}$, il vient alors que :

$$A^{n+1} = AQD^nQ^{-1} = QDQ^{-1}QD^nQ^{-1} = QDID^nQ^{-1} = QDD^nQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$$

La propriété est donc héréditaire et comme elle est initialisée pour $n = 0$, nous venons de montrer par récurrence que pour tout entier n,

$$A^n = QD^nQ^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Or $\begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-0{,}25)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-0{,}25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est une propriété des matrices diagonales.

Donc $A^n = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-0{,}25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 7 \times (-0{,}25)^n & 3 \\ -5 \times (-0{,}25)^n & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 35(-0{,}25)^n + 15 & -21(-0{,}25)^n + 21 \\ -25(-0{,}25)^n + 25 & 15(-0{,}25)^n + 35 \end{pmatrix}$

Donc $A^n = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 35(-0{,}25)^n + 15 & -21(-0{,}25)^n + 21 \\ -25(-0{,}25)^n + 25 & 15(-0{,}25)^n + 35 \end{pmatrix}$

4. d. On sait que

$$U_n = A^nU_0 = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 35(-0{,}25)^n + 15 & -21(-0{,}25)^n + 21 \\ -25(-0{,}25)^n + 25 & 15(-0{,}25)^n + 35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 200(35(-0{,}25)^n + 15) + 500(-21(-0{,}25)^n + 21) \\ 200(-25(-0{,}25)^n + 25) + 500(15(-0{,}25)^n + 35) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4(35(-0{,}25)^n + 15) + 10(-21(-0{,}25)^n + 21) \\ 4(-25(-0{,}25)^n + 25) + 10(15(-0{,}25)^n + 35) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 140(-0{,}25)^n + 60 - 210(-0{,}25)^n + 210 \\ -100(-0{,}25)^n + 100 + 150(-0{,}25)^n + 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70(-0{,}25)^n + 270 \\ 50(-0{,}25)^n + 450 \end{pmatrix}$$

Finalement $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70(-0{,}25)^n + 270 \\ 50(-0{,}25)^n + 450 \end{pmatrix}$ on en déduit que

$$\begin{cases} j_n = -70(-0{,}25)^n + 270 \\ a_n = 50(-0{,}25)^n + 450 \end{cases}$$

4. e. Comme $-1 < -0{,}25 < 1$ alors $(-0{,}25)^n$ tend vers 0 et donc j_n tend vers 270 et a_n tend vers 450.

4. f. A long terme, la population d'animaux va tendre vers un équilibre. La population des jeunes s'équilibrera vers 270 individus tandis que celle des animaux adultes vers 450 individus.

EXERCICE 08 **L'analyse d'utilisation d'une application :**

Un organisme d'apprentissage de langue propose une application à télécharger pour réaliser une formation en ligne. Cette application propose deux niveaux de langue : débutant ou avancé. Au début de chaque mois, l'organisme analyse l'évolution d'utilisation de l'application. Pour cela, ils observent le nombre d'inscrits qui changent de niveau et ceux qui désinstallent l'application car ils ont terminé la formation et ceux qui installent l'application car ils sont nouvellement inscrits à la formation.
Au début du mois 0, il y avait 300 utilisateurs au niveau débutant et 450 au niveau avancé.
On constate que chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé, l'autre moitié reste au niveau débutant et la moitié des avancés désinstallent l'application car ils ont terminé la formation. Par ailleurs, chaque mois, 100 nouveaux utilisateurs installent l'application en débutant et 70 en avancé.
On note (d_n) et (a_n) deux suites de nombres qui modélisent le nombre de débutants et d'avancés au début du mois n.
Pour tout entier n on note $U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$ on définit ainsi la suite de matrice colonnes (U_n).

1. Déterminez U_0.

2. A l'aide des informations de l'énoncé, explicitez les matrices A et B qui sont présentent dans la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ vérifié par suite de matrices colonne (U_n).

3. Montrez que pour tout entier n, $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I + nT)$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Montrez que la suite (U_n) admet un état stable noté U et explicitez U.

5. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = U_n - U$.

a. Montrez que $V_{n+1} = AV_n$.

b. En déduire V_n sous forme explicite (V_n en fonction de n).

c. En déduire une forme explicite de U_n.

6. Montrez que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$ puis en déduire que pour tout entier $n \geq 4$

$$0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}.$$

7. Peut-on prévoir l'évolution des cas d'utilisation de l'application à long terme ?

EXERCICE 09 **L'analyse d'utilisation d'une application**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par, $f(x) = (a_0\, x^2 + b_0 x + c_0)e^{2x}$ où a_0, b_0, c_0 sont trois réels.

1. Calculez $f'(x)$ et écrivez $f'(x)$ sous la forme : $(a_1 x^2 + b_1 x + c)e^{2x}$. Exprimez a_1, b_1 et c_1 en fonction de a_0, b_0 et c_0. Puis traduire les égalités obtenues à l'aide de matrices.

2. Plus généralement, montrez que pour tout n entier, la dérivée nième de f notée $f^{(n)}$ est de la forme : $f^{(n)} = (a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{2x}$ où a_n, b_n et c_n sont des nombres réels.

3. Exprimez sous forme de relation matricielle les réels $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction des réels a_n, b_n et c_n.

4. En notant (U_n) la suite de matrice définie par $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, donnez une expression de U_0 et donnez la relation de récurrence vérifié par la suite (U_n).

5. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donnez une expression de U_n en fonction de A,U_0 et n.

6. On se propose de déterminer une formule explicite de A^n :

a. Déterminez une matrice N telle que $A = 2I + N$.

b. Calculez N^2 et N^3 en déduire N^k pour $k \geq 3$.

c. Après avoir justifié l'utilisation du binôme de Newton montrez que pour tout $n \geq 2$:

$$A^n = 2^n I + n2^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}N^2$$

d. Vérifiez que la formule fonctionne encore pour $n = 0$ et $n = 1$.

e. Donnez alors la forme explicite de A^n et donc les formes explicites de a_n, b_n et c_n.

f. Applications : on donne $a_0 = 1, b_0 = 2, c_0 = 0$ en déduire l'expression de $f^{(10)}(x)$ pour tout x réel.

Nous venons de voir le thème très important de suites de matrices colonnes. Remarquez comment le mélange entre les thèmes des suites et des matrices se fait naturellement. Gardez bien ces résultats en tête et ces méthodes car nous les réutiliserons dans la dernière partie : chaîne de Markov qui mélangera en plus les probabilités. Mais avant d'entamer ce thème, nous allons nous doter d'un outil très pratique et puissant qui permettra de modéliser beaucoup de situations complexes en schémas simples. Ces Schémas sont appelés des graphes et ils sont très utilisés aussi bien en informatique qu'en mathématiques. Dans ce cours, nous n'allons qu'effleurer le domaine mais sachez que c'est un thème passionnant aux très nombreuses applications. A l'instar des Matrices, c'est une nouvelle façon d'organiser les données qui complète la forme de tableaux.

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1