



COURS PI

☆ *L'école sur-mesure* ☆

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement
privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Seconde - Module 3 - Statistiques et probabilités

Mathématiques

v.5.1



- ✓ **Guide de méthodologie**
pour appréhender notre pédagogie
- ✓ **Leçons détaillées**
pour apprendre les notions en jeu
- ✓ **Exemples et illustrations**
pour comprendre par soi-même
- ✓ **Prolongement numérique**
pour être acteur et aller + loin
- ✓ **Exercices d'application**
pour s'entraîner encore et encore
- ✓ **Corrigés des exercices**
pour vérifier ses acquis

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier



EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

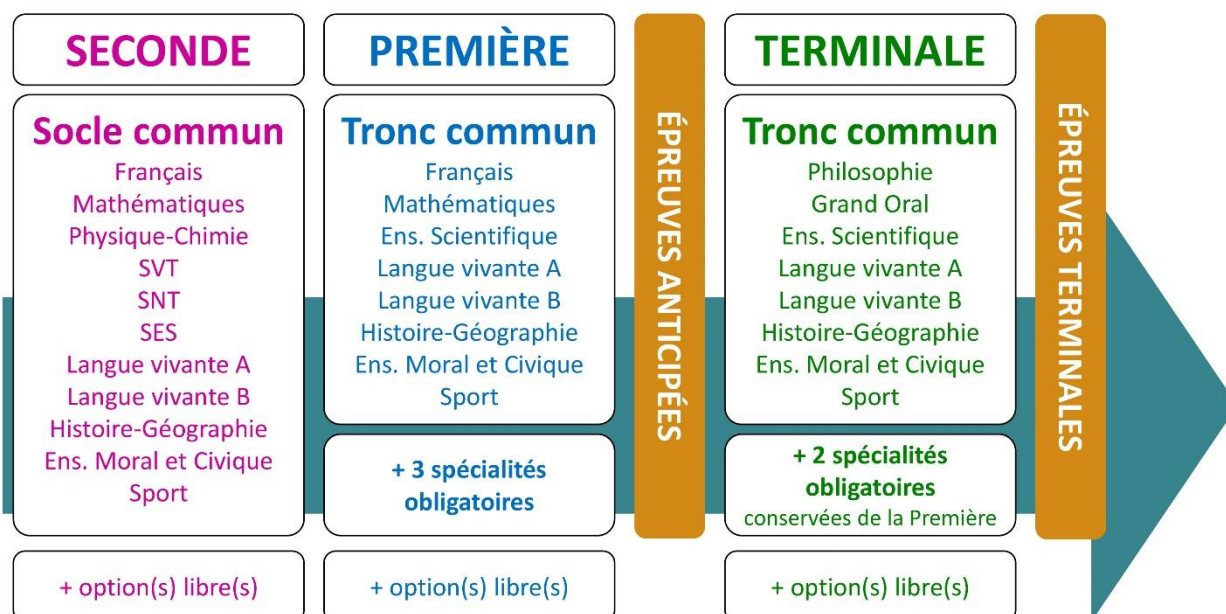
Comme vous le savez, la **réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.



A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s'ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet.
- **Réfléchissons ensemble** pour guider l'élève dans la réflexion.
- **L'essentiel** et **Le temps du bilan** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification.
- **Pour aller plus loin** pour visionner des sites ou des documentaires ludiques de qualité.
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES SECONDE

Module 3 – Statistiques et probabilités

L'AUTEURE



Sylvie LAMY

« Faire des maths c'est jouer aux legos. Il s'agit d'assembler des briques pour solutionner des problèmes ». Diplômée de l'Ecole Polytechnique et agrégée de Mathématiques, elle poursuit aujourd'hui son parcours professionnel à l'Institut Géographique National et au Ministère des Transports comme chargée de mission sur les projets spatiaux. Passionnée par les sciences physiques, son approche pédagogique réside dans la transmission du raisonnement scientifique. Elle attend de ses élèves de comprendre et d'explicitier leur démarche dans la résolution des problèmes.

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et **se trouvant hors manuel**). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS A L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés. Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat)**.
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur <http://fr.openoffice.org/>). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de **vos savoirs** (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de **vos savoir-faire** (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un **professeur selon chaque matière** tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.

Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.

Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.

Aux Cours Pi, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».

Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :



Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le **devoir n°1**



Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

- 1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit, sécurisé** et plus **rapide**.
- 2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur

N.B. : quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir** ; plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.

N.B. : si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.

En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.

Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND
PUIS-JE
LE
JOINDRE ?

Du **lundi** au **vendredi** : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.

QUEL
EST
SON
RÔLE ?

Orienter les parents et les élèves.

Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève.

Faire évoluer les outils pédagogiques.

Encadrer et **coordonner** les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND
PUIS-JE
LE
JOINDRE ?

Une question sur sa correction ?

- faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant **un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro**.
- autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND
PUIS-JE
LE
JOINDRE ?

Du **lundi** au **vendredi** : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
04.67.34.03.00
scolarite@cours-pi.com



Introduction	1
---------------------------	----------

CHAPITRE 1. Proportion et pourcentages	3
---	----------

COMPÉTENCES VISÉES

- Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.
- Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages.

1. Proportion d'une partie par rapport à un tout	5
2. Proportion d'une proportion	6
Le temps du bilan	8
Exercices	9

CHAPITRE 2. Evolutions	13
-------------------------------------	-----------

COMPÉTENCES VISÉES

- Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution.
- Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs. Calculer un taux d'évolution réciproque.

1. Variation absolue, variation relative, coefficients multiplicateurs	14
2. Evolutions successives et réciproques	17
3. Indices : pour aller plus loin	18
Le temps du bilan	20
Exercices	21
Les Clés du Bac	24

CHAPITRE 3. Analyse d'une série statistique	27
--	-----------

COMPÉTENCES VISÉES

- Maîtriser les indicateurs de tendance centrale d'une série statistique : moyenne pondérée.
- Maîtriser la linéarité de la moyenne.
- Maîtriser les indicateurs de dispersion : écart interquartile, écart type
- Décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.

1. Rappels sur les séries statistiques	29
2. Représentation graphique d'une série statistique	31
3. Moyenne, variance et écart type	33
4. Médiane et quartiles	38
5. Résumé une série, comparer 2 séries	39
6. Utilisation de la Casio graph35 pour déterminer les indicateurs d'une série	40
Le temps du bilan	42
Exercices	44

CHAPITRE 4. Probabilités 49

Q COMPÉTENCES VISÉES

- Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
- Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

1. Vocabulaire des probabilités	52
2. Probabilité d'un évènement	55
3. Modélisation d'une expérience	58
Le temps du bilan	64
Exercices.....	65

CHAPITRE 5. Echantillonnage 71

Q COMPÉTENCES VISÉES

- Lire et comprendre une fonction Python renvoyant le nombre ou la fréquence de succès dans un échantillon de taille n pour une expérience aléatoire à deux issues.
- Observer la loi des grands nombres à l'aide d'une simulation sur Python ou tableur.
- Simuler N échantillons de taille n d'une expérience aléatoire à deux issues. Si p est la probabilité d'une issue et f sa fréquence observée dans un échantillon, calculer la proportion des cas où l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $1/\sqrt{n}$.

1. Notion d'échantillon	74
2. Distribution d'échantillonnage et probabilités	75
3. Simulations	79
Le temps du bilan	80
Exercices.....	81

CORRIGÉS à vous de jouer et exercices 87



ESSAIS

- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths : de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **La symphonie des nombres premiers** *Marcus du Sautoy*
- **Dans la jungle des nombres premiers.** *John Derbyshire*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths.** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*
- **Les statistiques en BD** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Le mystère des nombres premiers** *Marcus du Sautoy*

SITES INTERNET RESSOURCES

- **pyvideo.org**
- **planetpython.org**
- **dimensions-math.org**



INTRODUCTION

Les statistiques et probabilités, ces outils Mathématiques que les élèves utilisent depuis des années sans le savoir...

En effet, tout élève a calculé sa moyenne et l'a comparée avec la moyenne de la classe. De même, dans des jeux de sociétés afin de gagner une partie, nous avons tous fait des choix entre deux ou trois possibilités et avons choisi celle où nous avons le plus de « chances » de gagner.

Au-delà de cet aspect ludique, nous sommes confrontés depuis toujours aux probabilités et aux statistiques dans nos quotidiens avec par exemple les prévisions météorologiques et les sondages d'opinions.

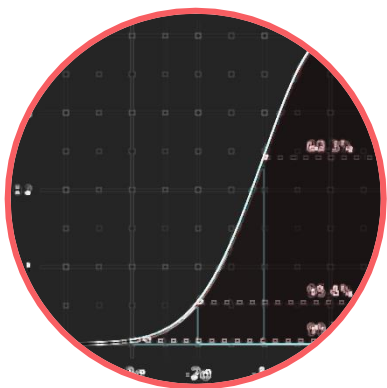
Pourtant les statistiques et les probabilités sont extrêmement importantes dans de nombreux domaines. Les statistiques régissent l'économie, les probabilités eux sont à la base de nombreux investissements financiers mais aussi de la physique qu'elle soit quantique ou liée l'astronomie.

La maîtrise de ces fondamentaux est essentielle pour la suite du programme du Lycée.

Bon courage !

CHAPITRE 1

PROPORTIONS ET POURCENTAGES



Les proportions et les pourcentages ont été vus au Collège. Ce chapitre est donc principalement un chapitre de rappels. Les exercices sont importants car les méthodes (tableaux, diagramme de Venn...) sont proches des méthodes de modélisation en probabilités. Au cours de ce chapitre, nous verrons plus précisément la notion de la proportion et le pourcentage d'une sous-population dans une population. Dans un second temps seront étudiés des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages.

Q COMPÉTENCES VISÉES

- Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.
- Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages.

ACTIVITÉ 1

Alors que se déroulent ces 6,7 et 8 février les **journées sans téléphone portable**, LCI a sélectionné pour vous dix chiffres tirés de cette étude. Ils vous prouveront à quel point nous sommes accros à ces petits ordinateurs de poche. Attention, certains chiffres peuvent choquer !

77% Selon l'étude, ce sont désormais 77% des Français qui détiennent un smartphone. Un chiffre qui dépasse pour la première fois celui des ordinateurs portables, détenus par 74% des Français. Pour le reste, 57% des interrogés possèdent un ordinateur de bureau et 53% une tablette.

26,6 Dans une journée, les Français consultent leur smartphone en moyenne 26,6 fois par jour. Pour les jeunes (18-24 ans), ce chiffre est quasiment doublé (50 fois par jour). De quoi donner le vertige.

58% Certaines pratiques sont beaucoup plus dangereuses. Selon l'étude, 58 % des Français reconnaissent qu'il leur arrive de consulter leur smartphone au volant. Ils sont 66% à admettre le regarder au moment de traverser la rue.

49% Au bureau, à la maison, au lit... le smartphone est utilisé partout. Selon l'étude, 49% des Français s'en servent notamment dans les transports en commun.

Un sur cinq Pour un Français sur cinq, il se passe moins de cinq minutes entre le réveil et le premier coup d'œil au téléphone portable (hors désactivation de l'alarme). Une proportion qui double chez les 18-24 ans.

47% Il y a 20 ans, vous auriez peut-être lu quelques pages d'un livre ou fait le tour de votre appartement. Selon l'étude, 47% des Français consultent leur téléphone lorsqu'ils se réveillent au milieu de la nuit.

Huit sur dix Fini les longues discussions pendant les déjeuners en famille du dimanche midi. L'étude nous apprend que 81 % des Français disent utiliser leur smartphone pendant les repas pris en famille ou en compagnie d'amis.

Les données de l'étude française sont issues de l'enquête internationale de Deloitte ("Global Mobile Consumer Survey 2016") menée sur 30 pays, auprès de 49 000 répondants. Les données présentées dans l'édition française sont basées sur un échantillon de 2 003 répondants français âgés de 18 à 75 ans.

1. Comment sont communiqués la plupart des résultats en rouge de cette enquête ? Un seul échappe à la règle : lequel ?

.....

.....

2. On s'intéresse au premier chiffre clé 77%. Complétez.

77% parmi les

âgés de

3. Convertissez le « Huit sur dix » en pourcentage.

.....

4. Chez les 18-24 ans, quelle proportion regarde son smartphone dans les minutes suivant le réveil ?

.....

5. Recherchez et citez des types d'articles où on utilise des proportions et des pourcentages.

.....

.....

SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ 1.1

1. Les résultats sont presque tous donnés sous forme de proportions. Seul le 26 ne correspond pas à une proportion.
2. 77% possèdent un smartphone parmi les Français âgés de 18 à 75 ans.
3. $\frac{8}{10}=80\%$
4. Chez les 18-24 ans, $\frac{2}{5}$ regardent leur smartphone dans les minutes suivant le réveil.
5. Exemples : articles sur des intentions de vote, sur l'inflation, la démographie...

Une proportion peut donc être donnée de différentes manières (fractions, pourcentages...). On constate également l'importance de spécifier les populations sur lesquelles on détermine une proportion.



PROPORTION ET POURCENTAGES

Proportion d'une partie par rapport à un tout



L'ESSENTIEL

Soit A un ensemble contenant n_A éléments inclus dans un ensemble E contenant n_E éléments.

La **proportion** du nombre d'éléments de A à celui de E est le quotient : $p = \frac{n_A}{n_E}$

Cette proportion est un nombre compris entre 0 et 1. Elle s'exprime généralement sous forme d'un **pourcentage a** :

$$p = p \times 100\% = a\% \quad (a = p \times 100)$$

➤ Une proportion peut donc s'exprimer avec un nombre décimal, une fraction ou un pourcentage.

Exemple ① : dans un lycée de 680 élèves, il y a 493 demi-pensionnaires.

Quel est le pourcentage de demi-pensionnaires dans ce lycée ?

Parmi les demi-pensionnaires, 40% sont des filles.

Quel est le pourcentage de filles demi-pensionnaires dans ce lycée ?

Réponse : E est l'ensemble des élèves, A est l'ensemble des demi-pensionnaires.

$$p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{493}{680} = 0,725 \quad \text{soit} \quad a = 0,725 \times 100 = 72,5$$

72,5% des élèves sont donc demi-pensionnaires.

Exemple ② : 24% des habitants d'un village de 1500 habitants ont moins de 18 ans.

Combien d'habitants sont mineurs ?

Réponse : E est l'ensemble des habitants, A est l'ensemble des habitants mineurs.

$$p = 24\% = 0,24 \quad n_A = p \times n_E = 0,24 \times 1500 = 360$$

360 habitants sont mineurs.

$\frac{1}{4}$; 0,25 ; 25% correspondent à la même proportion.



À VOUS DE JOUER 1

Complétez

1. Dans une entreprise de 120 salariés, 24 sont cadres.

L'ensemble E est

L'ensemble A est

La proportion de cadres vaut $p = \frac{n_{\dots}}{n_{\dots}} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

La proportion de cadre vaut %.

2. Dans une entreprise il y a 50 femmes qui représentent 2 cinquièmes des salariés.

Combien y a-t-il de salariés ?

L'ensemble E est

L'ensemble A est

$p = \frac{n_{\dots}}{n_{\dots}} = \frac{2}{5}$ donc $n_E = \frac{\dots}{\dots} n_A$ Il y a donc salariés.

02

PROPORTION ET POURCENTAGES

Proportion d'une proportion



L'ESSENTIEL

Soit un ensemble **E** contenant n_E éléments, **A** un ensemble contenant n_A éléments inclus dans E, et B un ensemble contenant n_B éléments inclus dans A.

Si p_1 est la proportion du nombre d'éléments de **A** à celui de **E**, et p_2 la proportion du nombre d'éléments de **B** à celui de **A**, la proportion du nombre d'éléments de **B** à celui de **E** vaut :

$$p = p_1 \times p_2$$

En d'autres termes, prendre la proportion d'une proportion revient à les multiplier.

Justification

Soit $B \subset A \subset E$

$$p_1 = \frac{n_A}{n_E} \quad p_2 = \frac{n_B}{n_A}$$

La proportion de B à A vaut : $p = \frac{n_B}{n_E} = \frac{n_B}{n_A} \times \frac{n_A}{n_E} = p_1 p_2$

Exemple ❶ : le quart de la moitié vaut un huitième.

$$\text{Calcul : } \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Exemple 2 : dans un lycée, 72,5% sont demi-pensionnaires.
 Parmi les demi-pensionnaires, 40% sont des filles.
 Quel est le pourcentage de filles demi-pensionnaires dans ce lycée ?

Réponse : E est l'ensemble des élèves, A est l'ensemble des demi-pensionnaires, B est l'ensemble des filles demi-pensionnaires.
 $p = 72,5\% \times 40\% = 29\%$



À VOUS DE JOUER 2

Complétez

1.

- A. 50% de 20% vaut%
- B. 20% de 50% vaut%
- C. 20% de 40% vaut%
- D. Le cinquième de la moitié vaut : $\frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots = \dots\%$

2. Dans une entreprise, il y a 36% de femmes dont le tiers sont des cadres.
 Quel est le pourcentage de femme cadres ?

$$p = \dots \times \frac{\dots}{\dots} = \dots \quad \text{Il y a donc } \dots \% \text{ de femmes cadres.}$$

LE TEMPS DU BILAN

- Soit **A** un ensemble contenant n_A éléments inclus dans un ensemble **E** contenant n_E éléments.

La **proportion** du nombre d'éléments de **A** à celui de **E** est le quotient : $p = \frac{n_A}{n_E}$

Cette proportion est un nombre compris entre 0 et 1. Elle s'exprime généralement sous forme d'un **pourcentage a** :

$$p = p \times 100\% = a\% \quad (a = p \times 100)$$

- Soit un ensemble **E** contenant n_E éléments, **A** un ensemble contenant n_A éléments inclus dans E, et B un ensemble contenant n_B éléments inclus dans A.

Si p_1 est la proportion du nombre d'éléments de **A** à celui de **E**, **et** p_2 la proportion du nombre d'éléments de **B** à celui de **A**, la proportion du nombre d'éléments de **B** à celui de **E** vaut :

$$p = p_1 \times p_2$$

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE

01

Donnez pour chaque expression la proportion en pourcentage que l'on prend d'une quantité si :

1. On la divise par 4.

.....

2. On en prend la moitié.

.....

3. On en prend les trois quarts.

.....

4. On la multiplie par $\frac{1}{5}$.

.....

5. On la multiplie par 0,7.

.....

6. On en prend 12% de 30%.

.....

EXERCICE

02

Dans une entreprise de 500 salariés, il y a 34% de femmes. Combien l'entreprise emploie-t-elle d'hommes ?

.....

EXERCICE

03

1. 107 femmes et 470 hommes ont été élus à l'Assemblée nationale en 2007.
Quelle est la proportion de femmes parmi les députés ?

.....

2. Dans une assemblée de 1200 personnes, 60% ont moins de 50 ans, dont 20 % ont moins de 30 ans.
Calculez la proportion des moins de 30 ans et le nombre de personnes ayant entre 30 et 50 ans.

.....

EXERCICE

04

Saint-Martin dispose de deux bureaux de vote. Le candidat X a obtenu 312 voix dans le premier bureau où il y a eu 654 votants, et 513 voix dans le second où 989 personnes ont voté.
Où a-t-il obtenu son meilleur score en pourcentage ? Sera-t-il élu sachant qu'il lui faut la majorité absolue ?

.....

EXERCICE

05

Dans une classe, il y a 65% de filles dont 20% sont externes. Sachant que 30% des élèves de la classe sont externes, quel est le pourcentage de garçons qui sont externes ?

.....

.....

EXERCICE

06

Une boisson contient 15 % d'alcool. On voudrait obtenir, à partir d'un litre de cette boisson, un mélange ne contenant que 5 % d'alcool. Quelle quantité d'eau doit-on rajouter ?

.....

.....

EXERCICE

07

Voici quelques données démographiques (année 2000).

Hommes	Femmes
48,7%	51,3%

✓ Hommes

moins de 15 ans	de 15 à 64 ans	plus de 64 ans
20%	67%	13%

✓ Femmes

moins de 15 ans	de 15 à 64 ans	plus de 64 ans
18%	64%	18%

Remplissez le tableau suivant (vous donnerez les résultats en pourcentages de la population totale, au dixième près).

	Moins de 15 ans	De 15 à 64 ans	Plus de 64 ans	Total
Hommes				
Femmes				
Total				

EXERCICE

08

Les élèves de Terminale d'un lycée étudient l'anglais, l'allemand ou l'espagnol en première langue vivante. Parmi ces élèves :

- ✓ 45 % sont des garçons,
- ✓ 70 % étudient l'anglais,
- ✓ 20 % des garçons étudient l'allemand,
- ✓ 40 % de ceux qui étudient l'anglais sont des garçons,
- ✓ il y a autant de garçons que de filles qui étudient l'espagnol.

Remplissez le tableau suivant en pourcentages du nombre d'élèves de Terminale (on a indiqué quelques données).

	Garçons	Filles	Total
Anglais			70%
Allemand			
Espagnol			
Total	45%		100%

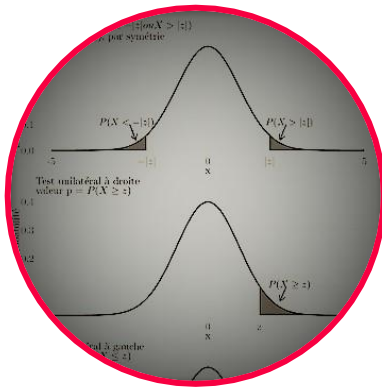
EXERCICE

09

Dans un village, 45 % des habitants ont un chat, et 32 % ont un chien.

1. Peut-on affirmer que 77 % des habitants ont un animal de compagnie (chien ou chat) ?

2. Si 61 % des habitants ont un chien ou un chat, quel est le pourcentage d'habitants ayant un chat et un chien ? *Conseil : utilisez plusieurs méthodes.*



Les évolutions (augmentations, diminutions...) ont été également abordées au Collège. Ce chapitre n'est donc pas vraiment nouveau ; il s'agit plutôt de formaliser les notions et le vocabulaire.

Lors de la première partie de ce chapitre, nous verrons en première partie les différences entre variations absolue et relatives ainsi que les coefficients multiplicateurs. Nous étudierons par la suite les évolutions successives et réciproques.

COMPÉTENCES VISÉES

- Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution.
- Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs. Calculer un taux d'évolution réciproque.

PRÉ-REQUIS

- Terminologie des probabilités.
- Terminologie de statistiques (moyenne, variance et écart-type).

ACTIVITÉ 2

+5,9% d'augmentation sur le prix de l'électricité dès juin ?

C'est en tout cas l'avis de la Commission de Régulation de l'Energie, avis bien souvent suivi par les gouvernements en place. Les prix de l'électricité sur les marchés de gros est en augmentation et la loi oblige à refléter ces coûts dans le calcul du tarif réglementé.

(Extrait tiré de www.fournisseurs-electricite.com)

1. Quel est le taux d'augmentation prévu en juin ?

Le prix du kWh est en janvier de 0,147€ HT

2. Quelle est la valeur en euros de l'augmentation ? Quel sera le prix HT en juin du kWh (arrondir au dix-millième) ? Si la TVA est de 20%, quel sera le prix TTC du kWh (arrondir au millième) ?

3. Convertissez le « Huit sur dix » en pourcentage. Quel était le prix TTC du kWh en janvier avec la TVA à 20% kWh (arrondir au dix-millième) ? Quel sera le prix TTC du kWh en juin kWh (arrondir au millième) ?

4. Comparez les méthodes des questions 2 et 3 et commenter les résultats.

SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ 2

1. Le taux d'augmentation est de 5,9 %.

2. $0,147 \times 0,059 = 0,0087$ La valeur de l'augmentation est de 0,0087 €.

Le prix HT en juin du kWh sera de 0,1557 €.

$0,1557 \times 1,2 \approx 0,187$ Le prix TTC du kWh sera de 0,187 €.

3. $0,147 \times 1,2 = 0,1764$ Le prix TTC du kWh en janvier était de 0,1764 €

$0,176 \times 1,059 \approx 0,187$

4. Les résultats sont identiques. Donc augmenter de 5,9 % puis de 20 % revient à augmenter de 20 % puis de 5,9 %.



ÉVOLUTIONS

Variation absolue, variation relative, coefficients multiplicateurs



L'ESSENTIEL

Une quantité évolue de la valeur Q_i à la valeur Q_f .

La variation absolue de Q_i à la valeur Q_f vaut : $Q_f - Q_i$

Exemple : la population française est passée entre 2000 et 2010, de 58,8 à 62,8 millions d'habitants. Quelle est la variation absolue ?

Réponse :

La population initiale est de 58,8 millions ; la population finale est de 62,8 millions.

La variation absolue vaut : $62,8 - 58,8 = 4,0$ millions.

- La variation relative peut être positive ou négative.
 - Si la variation positive on parle **d'augmentation**.
 - Si la variation est négative on parle **de diminution**.



L'ESSENTIEL

Une quantité évolue de la valeur Q_i à la valeur Q_f .

La variation relative ou taux d'évolution de Q_i à la valeur Q_f vaut :

$$\frac{Q_f - Q_i}{Q_i}$$

Le taux d'évolution s'exprime généralement sous forme d'un pourcentage d'évolution.

$$\frac{Q_f - Q_i}{Q_i} = t \%$$

- Le taux d'évolution peut être positif ou négatif.
 - Si le taux est positif on parle **d'augmentation**.
 - Si le taux est négatif on parle **de diminution**.

Exemple : la population française est passée entre 2000 et 2010, de 58,8 à 62,8 millions d'habitants. Quel est le taux d'évolution en pourcentage ?

Réponse :

La population initiale est de 58,8 ; la population finale est de 62,8.

$$\frac{62,8 - 58,8}{58,8} \approx 0,068 \quad \text{soit} \quad t = 0,068 \times 100 = 6,8$$

La population française a augmenté d'environ 6,8%.



À VOUS DE JOUER 3

Complétez

- 1.** Un produit valant 14 € est passé à 16 €.

Son prix initial est ; son prix final est

Sa variation absolue vaut : $P_f - \dots = \dots - \dots = \dots$

Le taux d'évolution vaut : $\frac{P_f - \dots}{\dots} = \frac{\dots - \dots}{\dots} \approx \dots$

Le taux d'évolution est (*positif/négatif*).....

Le produit a donc (*augmenté/diminué*) de%.

- 2.** Un produit valant 16 € est passé à 14 €.

Son prix initial est ; son prix final est

Sa variation absolue vaut : $P_f - \dots = \dots - \dots = \dots$

Le taux d'évolution vaut : $\frac{P_f - \dots}{\dots} = \frac{\dots - \dots}{\dots} = \dots$

Le taux d'évolution est (*positif/négatif*).....

Le produit a donc (*augmenté/diminué*) de%.



L'ESSENTIEL

- Augmenter une quantité Q de t % revient à la multiplier par $1 + t$ %.
$$Q_f = Q_i(1 + t\%)$$
- Diminuer une quantité Q de t % revient à la multiplier par $1 - t$ %.
$$Q_f = Q_i(1 - t\%)$$

$1 + t$ % et $1 - t$ % sont appelés coefficients multiplicateurs.

➤ Utiliser les coefficients multiplicateurs est généralement le moyen le plus simple de résoudre des problèmes d'évolution.

Exemple ① : un objet coûte 350 €. Le commerçant fait une remise exceptionnelle de 20%.

Quel est le prix après remise ?

Le coefficient multiplicateur vaut : $1 - 20\% = 0,8$

Réponse : $Q' = 350 \times (1 - 20\%) = 350 \times 0,8 = 280$

Le nouveau prix est donc 280€.

Exemple ② : un objet coûte 350 € TTC.

Quel est son prix HT (hors taxe) sachant que la TVA est de 20%.

(On applique la TVA au prix HT pour obtenir le prix TTC).

On passe du prix HT au prix TTC en augmentant de 20%.

Le coefficient multiplicateur vaut : $1 + 20\% = 1,2$

Réponse : $350 = Q(1 + 20\%) = Q \times 1,2$

$$Q = \frac{350}{1,2} = 292,64 \quad \text{Le prix HT est donc 292,64€.}$$

Attention ! Il ne faut pas diminuer le prix final de 20% !

Conseil : pour éviter les erreurs, écrire les formules avec quantité initiale et quantité finale, puis faire l'application numérique.



À VOUS DE JOUER 4

Complétez

1. Si on augmente de 2%, le coefficient multiplicateur vaut : $1 + \dots\% = \dots$

2. Si on diminue de 2%, le coefficient multiplicateur vaut : $1 - \dots\% = \dots$

3. La quantité initiale Q_i vaut 120. On augmente de 5%. On cherche la quantité finale.

$$Q_f = (1 + \dots)Q_i \quad \text{donc} \quad Q_f = \dots \times \dots = \dots$$

4. La quantité finale Q_f vaut 120 après une augmentation de 5%. On cherche la quantité initiale.

$$Q_f = (1 + \dots\%)Q_i \quad \text{donc} \quad Q_i = \frac{\dots}{\dots} \approx \dots$$

5. La quantité initiale Q_i vaut 120. On diminue de 5%. On cherche la quantité finale.

$$Q_f = (1 - \dots\%)Q_i \quad \text{donc} \quad Q_f = \dots \times \dots = \dots$$

6. La quantité finale Q_f vaut 120 après une diminution de 5%. On cherche la quantité initiale.

$$Q_f = (1 - \dots\%)Q_i \quad \text{donc} \quad Q_i = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$



L'ESSENTIEL

Une quantité Q subit successivement un taux d'évolution de t_1 % puis de t_2 %. La quantité après ces deux évolutions vaut :

$$Q_f = Q_i(1 + t_1\%)(1 + t_2\%)$$

Dans cette formule, les signes des taux peuvent être positifs ou négatifs.

Les coefficients multiplicateurs ne s'ajoutent pas ! ils se multiplient.

Exemple : un objet coûte 350 €. Il subit une première augmentation de 10%, puis une seconde de 20%. Calculez le taux d'augmentation global et le prix final de l'objet.

Réponse : le coefficient multiplicateur vaut : $(1 + 10\%)(1 + 20\%) = 1,1 \times 1,2 = 1,32$
 Ce coefficient correspond à une augmentation de 32% (et non de $10\% + 20\% = 30\%$!)
 Le nouveau prix est donc : $350 \times 1,32 = 462$ €.



À VOUS DE JOUER 5

Complétez

1. Si on augmente de 5% puis de 4%, le coefficient multiplicateur

$$(1 + \dots)(1 + \dots) = \dots$$

Cela correspond à une (augmentation/diminution) de %.

Si on augmente de 50% puis qu'on diminue de 50%, le coefficient multiplicateur vaut :

$$(1 + \dots)(1 - \dots) = \dots$$

Cela correspond à une (augmentation/diminution) de %.

2. Si on augmente une quantité successivement de 15% puis de 10 %, on aurait obtenu le même résultat en augmentant de 10% puis de 15%.

Vrai ☐

Faux ☐

3. Si on augmente une quantité de 15% puis qu'on applique 5% de réduction, on aurait obtenu le même résultat :

- en augmentant de 10% .

Vrai ☐

Faux ☐

- en appliquant 5% de réduction puis en augmentant le résultat de 15%.

Vrai ☐

Faux ☐



L'ESSENTIEL

Une quantité évolue de la valeur Q_1 à la valeur Q_2 avec un taux $t\%$.

Le **taux d'évolution réciproque** de $t\%$ noté $t'\%$, permettant de passer de Q_2 à la Q_1 satisfait à la relation :

$$(1 + t\%)(1 + t'\%) = 1$$

Dans cette formule, les signes des taux peuvent être positifs ou négatifs.

➤ Les taux d'évolution réciproques sont de signes contraires. Ils n'ont jamais la même valeur !

Justification :

$$Q_2 = Q_1(1+t\%) \text{ et } Q_1 = Q_2(1+t'\%)$$

$$\text{d'où } Q_2 = Q_2(1+t'\%)(1+t\%)$$

$$(1+t\%)(1+t'\%) = 1$$

Exemple : un commerçant veut « offrir la TVA » à ses clients.

Quel taux de remise doit-il appliquer aux prix TTC ?

N.B. : la TVA est de 20 %.

Réponse : on cherche le taux réciproque à celui correspondant à l'application de la TVA.

$$(1+20\%)(1+t'\%) = 1 \Leftrightarrow t'\% = \frac{1}{1,2} - 1 \approx -0,167$$

Le commerçant doit appliquer une remise de 16,7%.



À VOUS DE JOUER 6

Complétez

1. Taux d'évolution réciproque d'une augmentation de 25% :

$$(1+\dots\%)(1+t'\%) = \dots \Leftrightarrow 1+t'\% = \frac{\dots}{\dots} = \dots \text{ donc } t'\% = \dots$$

Le taux d'évolution réciproque de +25% est %.

2. Taux d'évolution réciproque d'une diminution de 50% :

$$(\dots\%)(1+t'\%) = \dots \Leftrightarrow 1+t'\% = \frac{\dots}{\dots} = \dots \text{ donc } t' = \dots$$

Le taux d'évolution réciproque de -50% est %.

03

ÉVOLUTIONS

Indices : pour aller plus loin



L'ESSENTIEL

On étudie l'évolution d'une grandeur Q .

A la valeur initiale Q_1 , on associe un **indice base 100** $I_1 = 100$.

Si Q_1 évolue avec un taux $t\%$ vers la valeur Q_2 , l'indice I_2 associé à la valeur Q_2 évolue avec le même taux.

Si $Q_2 = Q_1(1+t\%)$ alors :

$$I_2 = I_1(1+t\%) = 100 + t$$

Relation :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2}{100} \text{ soit : } I_2 = 100 \frac{Q_2}{Q_1}$$

➤ L'utilisation des indices permet d'obtenir très rapidement des pourcentages d'évolution.

Exemple : On étudie l'évolution de la population d'un pays (en millions d'habitants). On prend base 100 en 1900.

année	1900	1950	2000
population	21,2	25,6	30,5
indice	100	121	144

(on applique la relation : $I_2 = 100 \frac{Q_2}{Q_1}$).

On voit que la population a augmenté de 44% entre 1900 et 2000.

LE TEMPS DU BILAN

- Soit variation relative ou taux d'évolution de Q_i à la valeur Q_f vaut : $\frac{Q_f - Q_i}{Q_i}$

Pourcentage d'évolution $\frac{Q_f - Q_i}{Q_i} = t\%$

Augmenter une quantité Q de $t\%$ revient à la multiplier par $1 + t\%$.

$$Q_f = Q_i(1 + t\%)$$

Diminuer une quantité Q de $t\%$ revient à la multiplier par $1 - t\%$.

$$Q_f = Q_i(1 - t\%)$$

$1 + t\%$ et $1 - t\%$ sont appelés coefficients multiplicateurs.

- Evolutions successives :

Une quantité Q subit successivement un taux d'évolution de $t_1\%$ puis de $t_2\%$. La quantité après ces deux évolutions vaut :

$$Q_f = Q_i(1 + t_1\%)(1 + t_2\%)$$

- Les coefficients multiplicateurs d'évolution ne s'ajoutent pas ! ils se multiplient.

Une quantité évolue de la valeur Q_1 à la valeur Q_2 avec un taux $t\%$.

Le **taux d'évolution réciproque** de $t\%$ appelé $t'\%$, permettant de passer de Q_2 à la Q_1 satisfait à la relation :

$$(1 + t\%)(1 + t'\%) = 1$$

- Les taux d'évolution réciproques sont de signes contraires. Ils n'ont jamais la même valeur !

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE

10

Donnez le coefficient multiplicateur correspondant à :

1. Une augmentation de 5%

.....

2. Une réduction de 23%

.....

3. Une augmentation de 200%

.....

4. Une baisse de 50%

.....

EXERCICE

11

Complétez ces phrases sur les coefficients multiplicateurs.

1. 1,01 correspond à une de %.

2. 2,5 correspond à une de %.

3. Diviser par 2 correspond à une de %.

4. 0,24 correspond à une de %.

EXERCICE

12

La longueur L d'un rectangle est augmentée de 20% et sa largeur l diminuée de 10%.

Déterminez le pourcentage d'augmentation de son aire.

.....

.....

.....

.....

EXERCICE

13

1. La population du monde est passée de 3 à 7 milliards en 40 ans. Quel est son pourcentage d'augmentation ?

.....

.....

2. Un magasin propose 4 paquets de gâteaux pour le prix de 3. Quel est le pourcentage de réduction ?

3. Le prix TTC d'un congélateur est 350€. Quel est son prix HT (la TVA est de 20%) ?

EXERCICE

14

Un article augmente de 15%, puis baisse de 5%.

A-t-il augmenté de 10%, de plus de 10% ou de moins de 10% ?

EXERCICE

15

Complétez.

1) Deux hausses successives de 5% et 12% équivalent à une de %.

2) Deux baisses successives de 20% et 30% équivalent à une de %.

3) Une baisse de 10% suivie d'une hausse de 20% équivalent à une de %.

EXERCICE

16

Le cours de la bourse a baissé de 20%. De combien doit-il augmenter pour retrouver son niveau initial ?

Indication : on pourra poser $x = \frac{i}{100}$ ou i est un entier.

EXERCICE

17

Voici la production d'un fabricant de cabanes de jardin.

Année	1990	1995	2000	2005	2010
Production	2520	3610	3860	2760	2980

1. Construisez le tableau d'indices (base 100 en 1990).

2. Quel a été le taux d'évolution de la production entre 1990 et 2010 ?

EXERCICE

18

Une population de lapins augmente de 5% par an.

Ecrivez un algorithme en Python permettant de savoir quand la population aura doublé.



ÉVOLUTIONS

La manipulation des évolutions, comme celles des pourcentages, fait partie des compétences de base qu'il faut particulièrement maîtriser. Vous les utiliserez en mathématiques (suites, ...), en physique et même dans la vie courante.

Cette manipulation est simplifiée par l'utilisation des coefficients multiplicateurs qui évitent beaucoup d'erreurs.

Il faut faire particulièrement aux taux réciproques.

Si on augmente de 10% puis qu'on diminue de 10% une quantité, on ne retrouve pas la quantité initiale : $(1 + 10\%)(1 - 10\%) = 99\%$ donc on a diminué la quantité de 1%.

Compétences :

- Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution.
- Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs. Calculer un taux d'évolution réciproque.



Le gérant d'un hôtel situé dans la ville de Lyon étudie la fréquentation de son établissement afin de prévoir au mieux son budget pour les années futures.

Le 5 décembre 1998, le site historique de Lyon a été inscrit au patrimoine mondial de l'UNESCO et l'hôtel a vu son nombre de clients augmenter significativement comme l'indique le tableau ci-dessous :

Année	1997	1998	1999	2000
Nombre de clients	950	1 105	2 103	2 470

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation du nombre de clients entre 1997 et 2000.

Par ailleurs, depuis le 1^{er} janvier 2000, une étude statistique a permis de mettre en évidence que, chaque année, l'hôtel compte 1 200 nouveaux clients et que 70 % des clients de l'année précédente reviennent.

On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre total de clients de l'hôtel durant l'année $2000 + n$.

On a ainsi $u_0 = 2470$ et, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 0,7u_n + 1200$.

Réponse

$$\frac{Q_f - Q_i}{Q_i} = \frac{2470 - 950}{950} \approx 1,57 \text{ donc le pourcentage d'augmentation est } 157\%.$$

Une retenue d'eau artificielle contient $100\,000\text{ m}^3$ d'eau le 1^{er} juillet 2013 au matin.

La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue 500 m^3 pour l'irrigation des cultures aux alentours.

Cette situation peut être modélisée par une suite (u_n) .

Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 est $u_0 = 100\,000$.

Pour tout entier naturel n supérieur à 0, u_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n -ième jour qui suit le 1^{er} juillet 2013.

1. a. Justifier que le volume d'eau u_1 au matin du 2 juillet 2013 est égal à $95\,500\text{ m}^3$.
- b. Déterminer le volume d'eau u_2 , au matin du 3 juillet 2013.

Réponse 1.a

Le volume est le volume restant après évaporation (taux d'évolution : -4%) moins le volume prélevé.

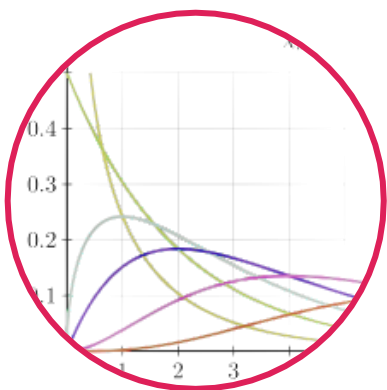
$$u_1 = (1 - 4\%)u_0 - 500 = 0,96 \times 100\,000 - 500 = 95\,500\text{ m}^3$$

Réponse 1.b

On fait le même raisonnement : $u_2 = (1 - 4\%)u_1 - 500 = 0,96 \times 95\,500 - 500 = 91\,180\text{ m}^3$

CHAPITRE 3

ANALYSE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE



Les statistiques intègrent plusieurs aspects :

- L'analyse des données (statistique descriptive) objet de ce chapitre.
- L'étude des échantillons qui permet d'interpréter des résultats prélevés sur un échantillon. Cet aspect sera vu au chapitre 5.

Les statistiques ont été étudiées au Collège : il s'agit donc essentiellement de rappels. La première partie de ce chapitre portera tout d'abord sur des rappels de séries statistiques. Nous intéresserons ensuite sur la représentation graphique d'une série statistique. Nous aborderons alors les notions comme variance, moyenne, écart-types, médiane et quartiles. Enfin, nous nous arrêterons sur la manière de décrire deux séries graphiques statistiques et de les comparer.

Q COMPÉTENCES VISÉES

- Maîtriser les indicateurs de tendance centrale d'une série statistique : moyenne pondérée.
- Maîtriser la linéarité de la moyenne.
- Maîtriser les indicateurs de dispersion : écart interquartile, écart type
- Décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.

ACTIVITÉ 3

Salaire médian net et salaire moyen net en France par personne (Insee)

Le salaire net médian mesuré en équivalent temps plein par l'Insee se monte à 1.797 euros par mois selon les dernières statistiques disponibles (2015, contre 1.783 euros en 2014), dont 1.650 euros pour les femmes et 1.906 euros pour les hommes, hors salaire des apprentis et des stagiaires.

Le salaire médian net est inférieur de 20,1 % au salaire moyen net des prélèvements à la source (CSG, CRDS notamment) qui se monte à 2.250 euros toujours selon l'Insee contrats aidés compris, dont 1.986 euros pour les femmes et 2.438 euros pour les hommes. En excluant les emplois aidés, le salaire net se monte à 2.277 euros mensuels.

Classées selon la catégorie socioprofessionnelle, les rémunérations nettes atteignent les montants suivants (Insee, salaires 2015) :

- Cadres et chefs d'entreprise salariés : 4.141 euros mensuels
- Professions intermédiaires (techniciens et technico-commerciaux, contremaîtres, agents de maîtrise, etc.) : 2.271 euros mensuels
- Employés : 1.637 euros mensuels
- Ouvriers : 1.717 euros mensuels
- Ces statistiques portent sur les salariés du privé et des entreprises publiques.

Salaire médian, salaire moyen, définitions et différences

Salaire médian : 50% des salariés gagnent plus, 50% gagnent moins

1. Quelle est la différence entre salaire moyen et salaire médian ?

2. Ces salaires ne sont pas égaux. Comment l'expliqueriez-vous ?

3. Que faut-il définir avant de mener une étude statistique ?

SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ 3

1. Le salaire moyen est la moyenne des salaires de la population observée (somme des salaires divisée par l'effectif total). Le salaire médian est le salaire tel que 50% des salaires sont au-dessus, et 50% en-dessous.
2. Il y a des très gros salaires, peu nombreux, qui font monter la moyenne.
3. On doit définir la population et le caractère étudié (ici le salaire net).



ANALYSE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

Rappels sur les séries statistiques

NOTION DE SÉRIE STATISTIQUE

Une étude statistique commence toujours par une **problématique** : c'est à partir de la question que l'on se pose que s'élabore l'**enquête** et que l'on récolte les **données**.



L'ESSENTIEL

L'ensemble sur lequel porte l'étude est la **population**.

Un élément de la population est un **individu**.

Le **caractère ou variable** est une propriété que l'on observe sur les individus

Le caractère peut être :

- **Qualitatif** s'il ne prend pas de valeur numérique
- **Quantitatif discret** s'il ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs numériques.
- **Quantitatif continu** s'il peut prendre un nombre infini de valeurs numériques.

Pour des variables qualitatives ou discrètes, les valeurs que peut prendre le caractère sont appelées **modalités**.

L'**étendue** est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur.

Une fois que la population est choisie ainsi que le caractère, l'**ensemble des données du caractère** collectées est appelé **série statistique**.

Ces données peuvent porter sur la population entière ou sur une partie (échantillon).

Les exemples suivants seront repris au cours du chapitre :

Exemple 1 : voici les résultats du bac d'un lycée. Il y avait 60 candidats. 5 ont eu une mention Très Bien, 10 ont eu mention Bien, 15 mentions Assez Bien, 20 l'ont eu sans mention. 10 n'ont pas eu le bac.

Population : les 60 candidats

Caractère : résultat au bac. Caractère qualitatif avec les modalités suivantes : {Mention TB, Mention Bien, Mention Assez Bien, Pas de mention, Non admis}

Série statistique : suite des résultats des différents candidats.

Exemple 2 : on a lancé 10 fois un dé : on a obtenu successivement 2 ; 3 ; 4 ; 4 ; 1 ; 6 ; 1 ; 3 ; 2 ; 3.

Population : les 10 lancers

Caractère : résultat du dé. Caractère quantitatif discret avec les modalités {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Série statistique : ensemble des résultats des 10 lancers.

Exemple 3 : on a pesé 10 bébés à la naissance. Voici leurs poids en kg :

2,2 ; 2,4 ; 2,6 ; 2,8 ; 2,9 ; 3,0 ; 3,1 ; 3,2 ; 3,3 ; 3,7

Population : les bébés

Caractère : poids à la naissance. Caractère quantitatif continu.

Série statistique : suite des 10 poids des bébés pesés.

EFFECTIFS ET FRÉQUENCES

On considère une série statistique pouvant prendre les valeurs (modalités).



L'ESSENTIEL

Le nombre de termes de la série, **donc le nombre d'individus de la population** ou de l'échantillon considéré est appelé **effectif total**.

L'**effectif** d'une valeur est le nombre de fois où la valeur apparaît dans la série.

La **fréquence** de cette valeur est le quotient de l'effectif par l'effectif total.

La somme des fréquences est égale à 1.

On suppose que l'effectif total est n . On appelle n_i l'effectif de la valeur x_i .

La fréquence f_i de x_i est donc :

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

- Pour des variables continues, on se ramène à des variables discrètes en regroupant les valeurs dans des intervalles appelées **classes**.
- La série statistique peut généralement se présenter sous forme d'un tableau modalités/effectifs ou modalités/fréquences.
- Si le caractère est quantitatif, on classe dans le tableau les valeurs par ordre croissant.
- Un mode est une valeur ayant la fréquence la plus grande. Pour les variables continues, on parle de classe modale.

Exemple 2 (suite) : on a lancé 10 fois un dé : on a obtenu successivement 2 ; 3 ; 4 ; 4 ; 1 ; 6 ; 1 ; 3 ; 2 ; 3.
Population : les 10 lancers

Valeurs→	1	2	3	4	5	6
Effectifs	2	2	3	2	0	1
Fréquences	0,2	0,2	0,3	0,2	0	0,1

Exemple 3 (suite) : on a pesé 10 bébés à la naissance. Voici leurs poids en kg :

2,2 ; 2,4 ; 2,6 ; 2,8 ; 2,9 ; 3,0 ; 3,1 ; 3,2 ; 3,3 ; 3,7

On peut définir 4 classes de poids : [2,0 ; 2,5[; [2,5 ; 3,0[; [3,0 ; 3,5[; [3,5 ; 4[.

Classes→	[2,0 ; 2,5[	[2,5 ; 3,0[	[3,0 ; 3,5[	[3,5 ; 4[
Effectifs	2	3	4	1
Fréquences	0,2	0,3	0,4	0,1



L'ESSENTIEL

Pour des variables quantitatives, on définit :

- les **effectifs cumulés croissants** (ECC) par la somme des effectifs des valeurs qui lui sont inférieures.
- les **effectifs cumulés décroissants** (ECD) par les sommes des effectifs des valeurs qui lui sont supérieures.
- les **fréquences cumulées croissantes** (FCC) par la somme des fréquences des valeurs qui lui sont inférieures.
- les **fréquences cumulées décroissantes** (FCD) par la somme des fréquences des valeurs qui lui sont supérieures.

Exemple 2 (suite) :

Effectifs cumulés croissants :

Valeurs→	1	2	3	4	5	6
Effectifs	2	2	3	2	0	1
ECC	2	4	7	9	9	10

On en déduit que pour 7 lancers, le résultat a été inférieur ou égal à 3.

Effectifs cumulés décroissants :

Valeurs→	1	2	3	4	5	6
Effectifs	2	2	3	2	0	1
ECD	10	8	6	3	1	1

On en déduit que pour 6 lancers, le résultat a été supérieur ou égal à 3.

➤ **Rappel : Il faut ranger les valeurs par ordre croissant !**



ANALYSE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

Représentation graphique d'une série statistique

DIAGRAMME CIRCULAIRE

Un diagramme circulaire (« camembert ») est un disque divisé en secteurs angulaires proportionnel à l'effectif (ou à la fréquence). Il permet la représentation de série pour une variable qualitative.

Méthode

On associe à chaque fréquence un angle du disque du diagramme circulaire en procédant par proportionnalité sachant que **360° correspond à la totalité de l'effectif**.

Exemple 1 (suite): voici les résultats du bac d'un lycée. Il y avait 60 candidats. 5 ont eu une mention Très Bien, 10 ont eu mention Bien, 15 mentions Assez Bien, 20 l'ont eu sans mention. 10 n'ont pas eu le bac.

Valeurs→	TB	B	AB	Admis	Non Admis	Total
Effectifs	5	10	15	20	10	60
Angle en °	30	60	90	120	60	360

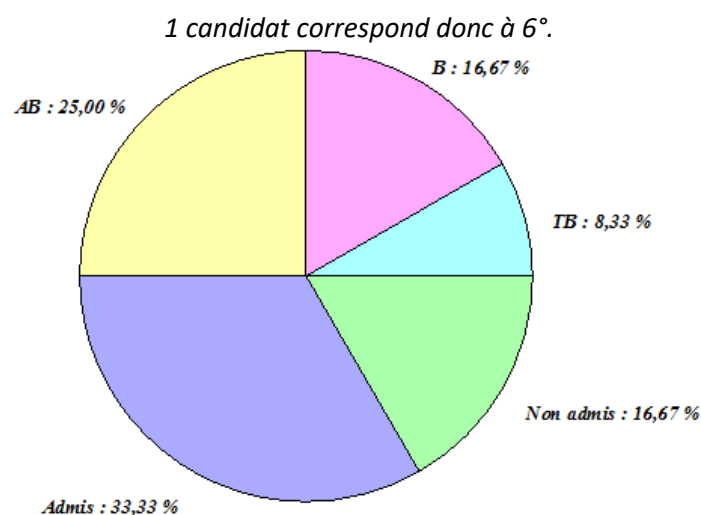


DIAGRAMME EN BÂTONS

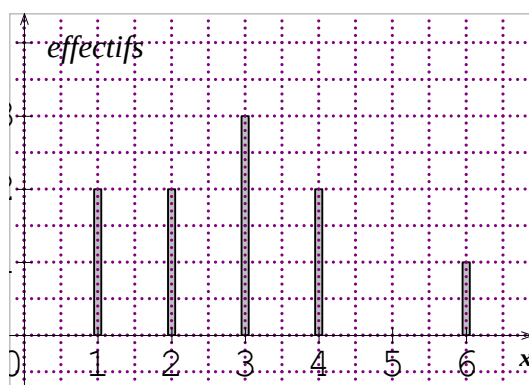
Un diagramme en bâtons est particulièrement indiqué pour illustrer une série statistique de variable quantitative discrète, éventuellement pour une variable qualitative.

Méthode

On place les valeurs de la variable (modalités) en abscisse, puis on trace pour chacune un bâton de hauteur proportionnelle à l'effectif (ou la fréquence) correspondant.

Exemple 2 (suite): on a lancé 10 fois un dé :

Valeurs→	1	2	3	4	5	6
Effectifs	2	2	3	2	0	1
Fréquences	0,2	0,2	0,3	0,2	0	0,1



HISTOGRAMME

Un histogramme ressemble à un diagramme en bâtons où les bâtons seraient accolés. Les histogrammes sont utilisés pour illustrer les séries statistiques de variable quantitative continue.

Méthode

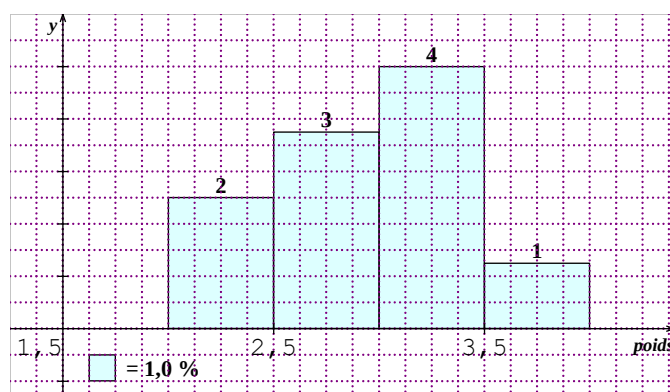
On regroupe les valeurs continues par classes, d'amplitudes égales ou différentes.

On place les valeurs de la variable en abscisse, puis on trace pour chaque classe un rectangle tel que l'aire de ce rectangle soit proportionnelle à l'effectif de la classe.

- Dans le cas de classes d'amplitude égale, **la hauteur de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif (ou fréquence) de chaque classe** (la largeur est constante).

Exemple 3 (suite): on a pesé 10 bébés à la naissance.

Classes→	[2,0 ; 2,5[	[2,5 ; 3,0[	[3,0 ; 3,5[	[3,5 ; 4[
Effectifs	2	3	4	1
Fréquences	0,2	0,3	0,4	0,1



POLYGONES D'EFFECTIFS CUMULÉS OU DE FRÉQUENCES CUMULÉES

Les **polygones à effectifs (ou fréquences) cumulés** croissants (ou décroissants) sont utilisés pour illustrer les séries statistiques de variable **quantitative continue**.

Méthode

On regroupe les valeurs continues par classes, d'amplitudes égales ou différentes.

On place les valeurs de la variable en abscisse.

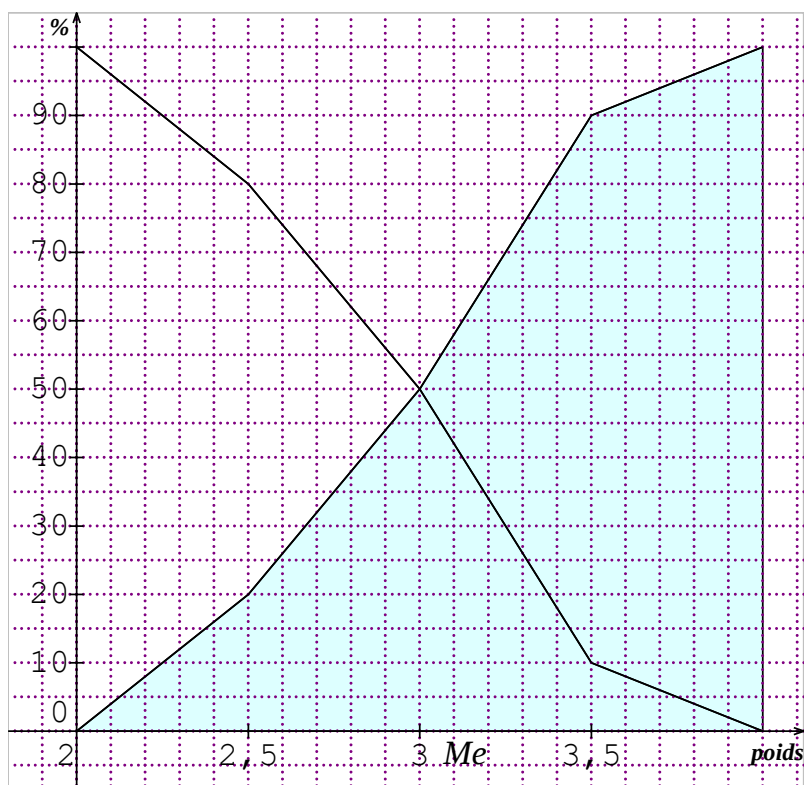
Le polygone des effectifs cumulés croissants est obtenu en joignant les points ayant pour abscisse la borne supérieure de la classe et pour ordonnée l'effectif cumulé croissant (plus le point ayant pour abscisse la borne inférieure de la première classe et pour ordonnée 0).

Le polygone des effectifs cumulés décroissants est obtenu en joignant les points ayant pour abscisse la borne inférieure de la classe et pour ordonnée l'effectif cumulé décroissant (plus le point ayant pour abscisse la borne supérieure de la dernière classe et pour ordonnée 0).

On fait de même avec les fréquences.

Exemple 3 (suite): on a pesé 10 bébés à la naissance.

Classes→	[2,0 ; 2,5[	[2,5 ; 3,0[	[3,0 ; 3,5[	[3,5 ; 4[
Effectifs	2	3	4	1
Fréquences	0,2	0,3	0,4	0,1
FCC	0,2	0,5	0,9	1
FCD	1	0,8	0,5	0,1



On a représenté les polygones de fréquences cumulées croissantes et de fréquences cumulées décroissantes.



ANALYSE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

Moyenne, variance et écart type

Dans la suite, on suppose le caractère quantitatif.

MOYENNE



L'ESSENTIEL

La **moyenne** d'une série statistique est la somme de toutes les valeurs prises divisée par l'effectif total.

$$\bar{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{\text{EffectifTotal}}$$

moyenne pondérée avec les effectifs

valeur	x_1	x_2	...	x_p
effectif	n_1	n_2	...	n_p

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i$$

moyenne pondérée avec les fréquences

valeur	x_1	x_2	...	x_p
effectif	f_1	f_2	...	f_p

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_kx_k = \sum_i f_i x_i$$

- Si la série est donnée avec un tableau valeurs/effectifs ou valeurs/fréquences, la moyenne de la série n'est pas en général la moyenne des valeurs.

Exemple 2 (suite): on a lancé 10 fois un dé :

Valeurs→	1	2	3	4	5	6
Effectifs	2	2	3	2	0	1
Fréquences	0,2	0,2	0,3	0,2	0	0,1

Calcul de la moyenne avec les effectifs :

$$\bar{x} = \frac{2 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 6}{10} = \frac{2 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 6}{10} = \frac{29}{10} = 2,9$$

Calcul avec les fréquences : $\bar{x} = 0,2 \times 1 + 0,2 \times 2 + 0,3 \times 3 + 0,2 \times 4 + 0,1 \times 6 = 2,9$

- Si le caractère est quantitatif **continu**, on prend pour valeur la moyenne des extrémités de la classe.

Exemple 3 (suite) : on a pesé 10 bébés à la naissance.

Classes→	[2,0 ; 2,5[	[2,5 ; 3,0[	[3,0 ; 3,5[	[3,5 ; 4[
Effectifs	2	3	4	1
Fréquences	0,2	0,3	0,4	0,1

$$\text{Calcul avec les effectifs : } \bar{x} = \frac{2 \times 2,25 + 3 \times 2,75 + 4 \times 3,25 + 1 \times 3,75}{10} = 2,95$$



L'ESSENTIEL

Propriété de linéarité de la moyenne

Soit une série x :

VALEUR	x_1	x_2	...	x_p
EFFECTIF	n_1	n_2	...	n_p

On considère la série $y = ax + b$ construite sur la série x suivante :

VALEUR	$y_1 = ax_1 + b$	$y_2 = ax_2 + b$	...	$y_p = ax_p + b$
EFFECTIF	n_1	n_2	...	n_p

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

Justification :

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{n_1 y_1 + n_2 y_2 + \dots + n_p y_p}{N} = \frac{n_1 (ax_1 + b) + n_2 (ax_2 + b) + \dots + n_p (ax_p + b)}{N} \\
 &= \frac{an_1 x_1 + n_1 b + an_2 x_2 + n_2 b + \dots + an_p x_p + n_p b}{N} \\
 &= \frac{a(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p) + b(n_1 + n_2 + \dots + n_p)}{N} \quad \text{avec } n_1 + n_2 + \dots + n_p = N \\
 &= a \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{N} + b \\
 &= a\bar{x} + b
 \end{aligned}$$

➤ Cette propriété utile pour simplifier certains calculs.



À VOUS DE JOUER 7

Complétez

- $\bar{x} = 5$
 $y = 3x$ a pour moyenne $\bar{y} = \dots$
 $y = x + 3$ a pour moyenne $\bar{y} = \dots$
 $y = 10 - 2x$ a pour moyenne $\bar{y} = \dots$

2.

Valeur de x	102	105	106	107
effectif	3	8	5	4

On calcule la moyenne de

valeur	2	...	...	...
effectif	3	8	5	4

moyenne : $\frac{3 \times \dots + 8 \times \dots + 5 \times \dots + 4 \times \dots}{\dots} = \dots$

Donc $\bar{x} = \dots + 100 = \dots$



L'ESSENTIEL

Soit une série x de moyenne $\bar{x}$

VALEUR	x_1	x_2	...	x_p
EFFECTIF	n_1	n_2	...	n_p

On définit :

- la **variance** V par : $V = \frac{1}{N} (n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_p - \bar{x})^2)$
- l'**écart-type** σ de la série par : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{N} (n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_p - \bar{x})^2)}$

Exemple :

valeur (x)	1	2	3	5
effectif	2	1	4	3

On calcule la moyenne : $\bar{x} = \frac{2 \times 1 + 1 \times 2 + 4 \times 3 + 3 \times 5}{10} = \frac{31}{10} = 3,1$

Variance et écart-type par la première expression :

$$V = \frac{2 \times (1 - 3,1)^2 + 1 \times (2 - 3,1)^2 + 4 \times (3 - 3,1)^2 + 3 \times (5 - 3,1)^2}{10} = \frac{209}{10} = 2,09 \quad \sigma = \sqrt{2,09} \approx 1,4$$



L'ESSENTIEL

Soit une série x de moyenne $\bar{x}$

VALEUR	x_1	x_2	...	x_p
EFFECTIF	n_1	n_2	...	n_p

Autre expression de la variance et de l'écart-type :

$$V = \frac{1}{N} (n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_p - \bar{x})^2) - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} (n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_p - \bar{x})^2) - (\bar{x})^2} = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$$

Méthode pour la variance et l'écart-type

On utilise généralement la 2^{ème} expression.

On calcule la moyenne, si cela n'a pas été fait.

On ajoute une ligne en mettant les valeurs au carré.

	x_1^2	x_2^2	...	x_p^2
valeur	x_1	x_2	...	x_p
effectif	n_1	n_2	...	n_p

On calcule la moyenne de cette nouvelle série.

On retranche le carré de la moyenne.

On obtient la variance.

On prend la racine carrée pour obtenir l'écart-type.

Exemple :

On reprend l'exemple précédent :

valeur (x)	1	2	3	5
effectif	2	1	4	3

On calcule la moyenne : $\bar{x} = \frac{2 \times 1 + 1 \times 2 + 4 \times 3 + 3 \times 5}{10} = \frac{31}{10} = 3,1$

valeur (x^2)	1	4	9	25
valeur (x)	1	2	3	5
effectif	2	1	4	3

$$\overline{x^2} = \frac{2 \times 1 + 1 \times 4 + 4 \times 9 + 3 \times 25}{10} = \frac{117}{10} = 11,7$$

$$\overline{x^2} - \bar{x}^2 = 11,7 - 3,1^2 = 2,09 \quad \sigma = \sqrt{2,09} \approx 1,4$$



À VOUS DE JOUER 8

Complétez

valeur (x)	1	3	4	5
effectif	4	2	10	4

L'effectif total vaut

$$\text{Moyenne : } \bar{x} = \frac{4 \times 1 + \dots}{20} = \frac{\dots}{20} = \dots$$

Variance et écart-type par la première expression :

$$V = \frac{4 \times (1 - 3,5)^2 + 2 \times \dots}{20} = \frac{\dots}{20} = \dots$$

$$\sigma = \sqrt{\dots} \approx \dots$$

Variance et écart-type par la deuxième expression :

valeur (x^2)	1			
valeur (x)	1	3	4	5
effectif	4	2	10	4

$$\overline{x^2} = \frac{4 \times 1 + \dots}{20} = \dots$$



L'ESSENTIEL

La **médiane** d'une série statistique est le nombre Me tel que :

- 50% au moins des individus ont une valeur inférieure ou égale à Me
- 50% au moins des individus ont une valeur supérieure ou égale à Me

- La médiane est une valeur partageant en 2 (ou approximativement) une série statistique.
- Ne pas confondre médiane et moyenne (les 2 valeurs peuvent être très différentes !).

Méthode : caractère quantitatif discret

Les valeurs sont supposées être rangées dans l'ordre croissant. L'effectif total est N .

- Si $N = 2k + 1$ (N impair), la médiane vaut x_{k+1} ($k+1$ nième valeur)
- Si $N = 2k$ (N pair) la médiane vaut $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ (moyenne entre la $k^{\text{ème}}$ et la $k+1^{\text{ème}}$ valeur).
- Il est pratique d'utiliser les effectifs ou les fréquences cumulées.

Exemple 2 (suite): on a lancé 10 fois un dé :

Valeurs→	1	2	3	4	5	6
Effectifs	2	2	3	2	0	1
ECC	2	4	7	9	9	10

10 est pair ; la médiane est la moyenne de la 5^{ème} et de la 6^{ème} valeur.
Les effectifs cumulés nous indiquent que ces deux valeurs valent 3.
Donc, $Me = 3$.



L'ESSENTIEL

Le **premier quartile** Q_1 d'une série statistique est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des données soient inférieures ou égales à Q_1 .

Le **troisième quartile** Q_3 d'une série statistique est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des données soient inférieures ou égales à Q_3 .

Méthode : caractère quantitatif discret

Les valeurs sont supposées être rangées dans l'ordre croissant.

- Premier quartile Q_1 :

on cherche le plus petit entier k tel que $\frac{N}{4} \leq k$. Q_1 vaut la $k^{\text{ème}}$ valeur.

- Troisième quartile Q_3 :

on cherche le plus petit entier k tel que $\frac{3N}{4} \leq k$. Q_3 vaut la $k^{\text{ème}}$ valeur.

- Il est pratique d'utiliser les effectifs ou les fréquences cumulées.

Exemple 2 (suite): on a lancé 10 fois un dé :

Valeurs→	1	2	3	4	5	6
Effectifs	2	2	3	2	0	1
ECC	2	4	7	9	9	10

$$\frac{N}{4} = 2,5 ; k = 3 \quad x_3 = 2 \quad \text{donc : } Q_1 = 2$$

$$\frac{3N}{4} = 7,5 ; k = 8 \quad x_8 = 4 \quad \text{donc : } Q_3 = 4$$



L'ESSENTIEL

L'intervalle interquartile est $[Q_1; Q_3]$; l'écart interquartile vaut : $Q_3 - Q_1$

- 50% des valeurs appartiennent donc à l'intervalle interquartile.
- L'étendue et l'écart interquartile donnent une indication sur la répartition des valeurs. Ce sont des mesures de dispersion.



ANALYSE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

Résumé une série, comparer 2 séries

INDICATEURS DE TENDANCE CENTRALE ET DE DISPERSION



L'ESSENTIEL

Un indicateur de tendance centrale est une valeur résumant une série statistique.

La moyenne et la médiane sont des indicateurs de tendance centrale.

Il en existe d'autres, par exemple le mode (valeur ayant le plus grand effectif).

Les indicateurs de tendance centrale sont toujours compris entre la plus petite et la plus grande valeur.



L'ESSENTIEL

Un indicateur de dispersion mesure la dispersion des valeurs d'une série.

L'étendue*, l'écart inter-quantile et l'écart type sont des indicateurs de dispersion.

Les indicateurs de dispersion sont positifs.

Si 2 séries ont une même moyenne (respectivement une même médiane), les indicateurs de dispersion seront d'autant plus grands que les données sont dispersées.



À VOUS DE JOUER 9

Complétez avec *tendance centrale* ou *dispersion*.

L'étendue est un indicateur de

La médiane est un indicateur de

La moyenne est un indicateur de

L'écart-type est un indicateur de

L'écart inter-quantile est un indicateur de

UN EXEMPLE DE REPRÉSENTATION RÉSUMÉE D'UNE SÉRIE

Les valeurs extrêmes, la médiane et les quartiles permettent de partager la série en 4 parties. On a ainsi une idée de la répartition des effectifs (ou des fréquences) des différentes valeurs.



L'ESSENTIEL

La **boîte à moustaches** (**diagramme en boîte**) est constituée :

- d'un rectangle délimité par le premier et le troisième quartiles, partagé par un trait représentant la médiane.
- de 2 traits (les moustaches) de part et d'autre du rectangle correspondant d'un côté aux valeurs entre le minimum et le premier quartile Q_1 , de l'autre côté aux valeurs entre le troisième quartile Q_3 et le maximum

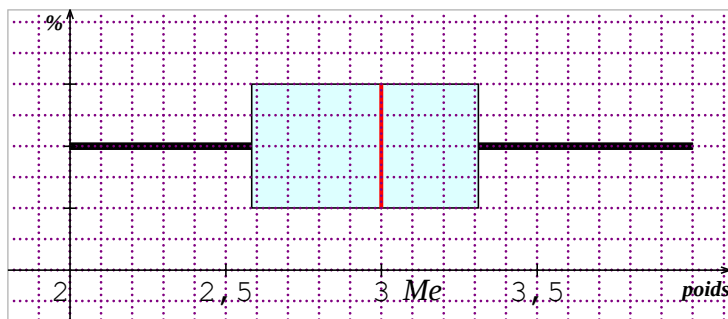
- La hauteur de la boîte est arbitraire.
- Ces diagrammes permettent de comparer facilement deux séries.

Exemple 3 (suite) : on a pesé 10 bébés à la naissance.

Classes→	[2,0 ; 2,5[	[2,5 ; 3,0[	[3,0 ; 3,5[	[3,5 ; 4[
Effectifs	2	3	4	1
Fréquences	0,2	0,3	0,4	0,1
FCC	0,2	0,5	0,9	1

La médiane, le premier et le troisième quartile ont été calculés précédemment.

$$Q_1 = 2,6 \text{ kg} \quad Me = 3 \text{ kg} \quad Q_3 = 3,3 \text{ kg}$$



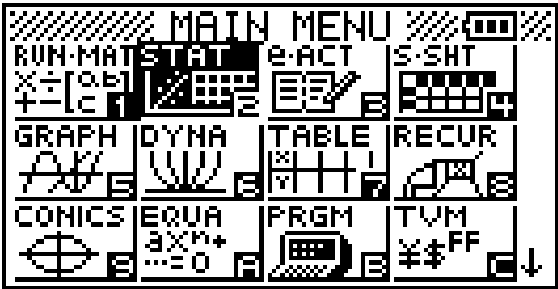
ANALYSE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

Utilisation de la Casio graph35 pour déterminer les indicateurs d'une série

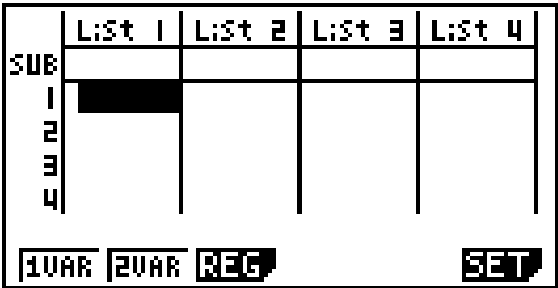
Exemple :

valeur (x)	1	2	3	5
effectif	2	1	4	3

Entrer dans le module STAT Appuyer sur F2 (CALC)



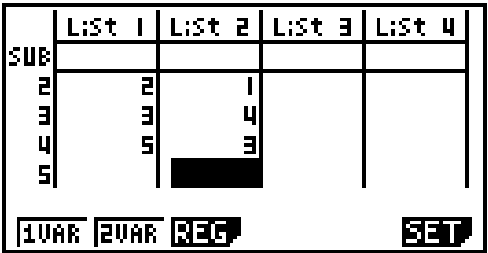
Appuyer sur F2 (CALC) .



puis sur F6 (SET).

Dans la ligne 1VarFreq, choisir LIST puis un numéro de liste (ici 2)

Revenir à la page précédente avec EXIT.



On entre les données (d'abord les valeurs dans la liste1 puis les effectifs dans la liste2)

Appuyer sur 1VAR pour obtenir les indicateurs (penser à faire défiler vers le bas !).

1 variable	1 variable	1 variable
$\bar{x}$ =3.1	s_x =1.52388392	Med =3
Σx =31	n =10	Q3 =5
Σx^2 =117	minX =1	maxX =5
σ_x =1.44568322	Q1 =2	Mod =3
s_x =1.52388392	Med =3	Mod:n=1
n =10	Q3 =5	Mod:F=4

Pour les séries simples (pas d'effectifs), dans SET, il faut laisser 1.

LE TEMPS DU BILAN

Ce chapitre a permis de faire le point sur les acquis du collège concernant l'analyse statistique avec certains compléments comme la moyenne pondérée, la linéarité de la moyenne, les expressions de la variance et de l'écart-type.

- L'étendue d'une série est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur.
- La **moyenne** d'une série statistique est la somme de toutes les valeurs prises divisée par l'effectif total.

$$\bar{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{\text{Effectif Total}}$$

Moyenne pondérée avec les effectifs

valeur	x_1	x_2	...	x_p
effectif	n_1	n_2	...	n_p

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i$$

Moyenne pondérée avec les fréquences

valeur	x_1	x_2	...	x_p
effectif	f_1	f_2	...	f_p

$$\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k = \sum_i f_i x_i$$

Linéarité de la moyenne : on considère la série $y = ax + b$ construite sur la série x suivante :

valeur	$y_1 = ax_1 + b$	$y_2 = ax_2 + b$	...	$y_p = ax_p + b$
effectif	n_1	n_2	...	n_p

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

- **Variance**

$$V = \frac{1}{N} (n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_p - \bar{x})^2)$$

- **Écart-type**

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{N} (n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_p - \bar{x})^2)}$$

Autre formulation :

$$V = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_p x_p^2}{N} - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_p x_p^2}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

- La **médiane** d'une série statistique est le nombre Me tel que :
 - 50% au moins des individus ont une valeur inférieure ou égale à Me
 - 50% au moins des individus ont une valeur supérieure ou égale à Me .
- Le **premier quartile** Q_1 d'une série statistique est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des données soient inférieures ou égales à Q_1 .
- Le **troisième quartile** Q_3 d'une série statistique est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des données soient inférieures ou égales à Q_3 .
- **Ecart interquartile** : $I = Q_3 - Q_1$
- Indicateurs de **tendance centrale** : moyenne, médiane, quartiles
- Indicateurs de **dispersion** : étendue, écart-type, variance, écart interquartile

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
 Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
 Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE

19

Le premier tour d'une élection a opposé 4 candidats A, B, C et D. Voici les pourcentages de vote obtenu par chacun.

A : 15%	B : 30%	C : 35%	D : 20%
---------	---------	---------	---------

1. Quelle est la population ? le caractère ? Comment qualifieriez-vous le caractère ?

2. Représentez graphiquement cette série en justifiant précisément le choix de représentation.

EXERCICE

20

Voici une série statistique représentant l'âge des participants à une compétition.

14	17	16	12	14
12	14	13	13	8
13	9	10	14	9
10	13	15	10	10

1. Quelle est la population ? le caractère ? Comment qualifieriez-vous le caractère ?

2. Faites un tableau avec effectifs et effectifs cumulés croissants.

3. Représentez cette série avec une boîte à moustaches (facultatif).

4. Déterminez : sa moyenne, son minimum, son maximum, son étendue, sa médiane, ses 1^{er} et 3^{ème} quartile.

5. Résumez cette série à l'aide d'un diagramme à moustaches (facultatif).

6. Vérifiez avec une calculatrice les résultats.



Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- | | Vrai | Faux |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1) Si les valeurs d'une série ont pour unité le mètre, la variance a pour unité le mètre carré. | ☐ | ☐ |
| 2) Si l'écart-type d'une série est nul, alors toutes les valeurs sont égales. | ☐ | ☐ |
| 3) Si la moyenne et la médiane d'une série sont égales, alors l'écart interquartile est égal à 2 fois l'écart type. | ☐ | ☐ |

Voici les statistiques concernant le nombre de frères et sœurs d'élèves d'un lycée.

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectifs	357	200	101	30	5

1. Quelle est la population ? le caractère ? Comment qualifieriez-vous le caractère ?

.....

.....

2. Déterminez la médiane, le 1^{er} et 3^{ème} quartile. Représenter sous forme de boîte à moustaches (facultatif).

.....

.....

.....

.....

.....

3. Déterminez la moyenne et l'écart-type de cette série.
On peut utiliser les fonctions statistiques de la calculatrice.

.....

.....

.....

EXERCICE

23

Voici les salaires et effectifs de 2 catégories de personnel dans 2 entreprises.

Entreprise A	Employés	Cadres
Salaire	1800	2700
Effectif	20	5

Entreprise B	Employés	Cadres
Salaire	1700	2500
Effectif	15	10

Comparez les salaires des employés et cadre dans les 2 entreprises, puis le salaire moyen.
Que remarque-t-on ? Dans quelle entreprise a-t-on intérêt à se faire embaucher ?

.....

.....

.....

.....

.....

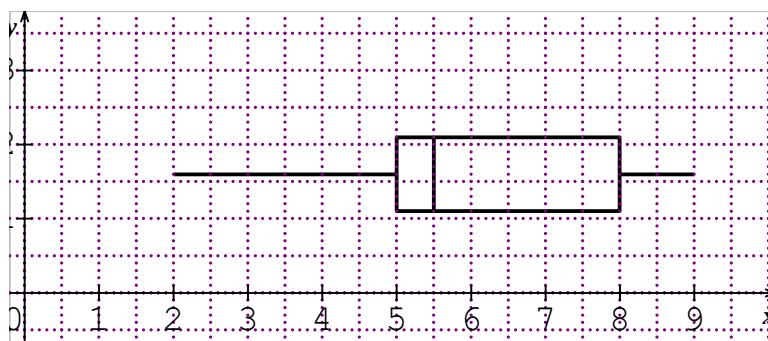
.....

EXERCICE

24

Voici une boîte à moustaches représentant une série statistique.

Complétez.



- A. La médiane a pour valeur
- B. 7 est son
- C. des valeurs appartiennent à $[5;8]$.
- D. des valeurs appartiennent à $[8;9]$.



**Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1**

