COURS PI

L'école sur-mesure

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Première - Module 3 - Cinématique et mécanique

Sciences de l'Ingénieur

v.5.1

- ***Guide de méthodologie***
  pour appréhender notre pédagogie
- ***Leçons détaillées***
  pour apprendre les notions en jeu
- ***Exemples et illustrations***
  pour comprendre par soi-même
- ***Prolongement numérique***
  pour être acteur et aller + loin
- ***Exercices d'application***
  pour s'entraîner encore et encore
- ***Corrigés des exercices***
  pour vérifier ses acquis

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

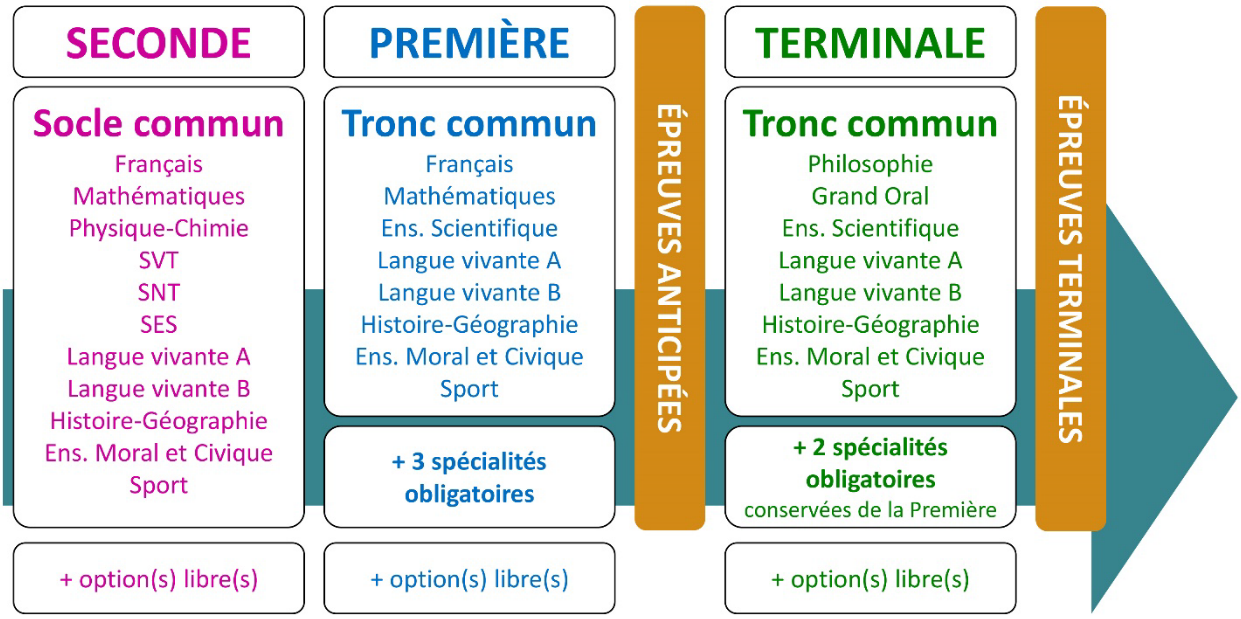
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s'ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **A vous de jouer** pour mettre en application
- **L'essentiel** et **Le temps du bilan** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **Pour aller plus loin** pour visionner des sites ou des documentaires ludiques de qualité
- Et enfin... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

Module 3 – Cinématique et mécanique

L'AUTEUR

Dorian JACQUOT

« C'est l'exigence et la bienveillance qui m'ont toujours animé pour concevoir ce manuel par lequel nous partons ensemble à la découverte de ce qui fait les sciences de l'ingénieur : la connaissance scientifique d'une part, mais aussi la démarche, la réflexion, la conception et la communication ». Ingénieur en systèmes mécaniques et professeur agrégé en sciences industrielles de l'ingénieur, Dorian enseigne cette discipline à la croisée des sciences et de l'innovation. Passionné par les langues, en plus de parler couramment Python, Java, HTML, CSS, PHP, C++... il maîtrise également l'anglais et l'espéranto.

PRÉSENTATION

Aujourd'hui, tout scientifique est confronté à la communication. Sa recherche n'est utile pour la société que si elle est communiquée, vulgarisée et expliquée. Savoir commenter des données, argumenter un point de vue scientifique et développer un raisonnement sont des qualités indéniables d'un chercheur ou d'un ingénieur dont les fondamentaux s'apprennent depuis le plus jeune âge.

La discipline « enseignement scientifique » va non seulement permettre aux élèves de constituer leur socle de connaissances culturelles et notionnelles scientifiques, mais aussi de les préparer à analyser, commenter, communiquer et argumenter ses raisonnements, qualités utiles à tout citoyen, à une époque où les grandes questions scientifiques deviennent la responsabilité de chacun.

Ce sont ces compétences qui seront évaluées au baccalauréat et c'est à cela que va vous préparer par étapes, de façon très guidée, ce module d'enseignement scientifique.

CONSEILS À L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés.

Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais <u>travaillez régulièrement</u>.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »). Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.

Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».

Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
*Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur.*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir ;** plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.

QUEL EST SON RÔLE ?

Orienter les parents et les élèves.
Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève.
Faire évoluer les outils pédagogiques.
Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Une question sur sa correction ?
- faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro.
- autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
04.67.34.03.00
scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

COMPÉTENCES VISÉES

- Modéliser les mouvements.
- Déterminer les grandeurs géométriques et cinématiques d'un mécanisme.
- Proposer et justifier des hypothèses ou simplification en vue d'une modélisation.
- Mécanique du point.
- Mécanique du solide.

COMPÉTENCES VISÉES

- Modéliser les mouvements.
- Modéliser les actions mécaniques.
- Modéliser un mécanisme sous une forme graphique : schéma cinématique, graphe des liaisons.
- Proposer et justifier des hypothèses ou simplifications en vue d'une modélisation.
- Déterminer les grandeurs géométriques et cinématiques d'un mécanisme.
- Caractériser la puissance et l'énergie nécessaires au fonctionnement d'un produit ou d'un système.

SUGGESTIONS CULTURELLES

QUESTIONS D'ORIENTATION PROFESSIONNELLE

- **Spécialité des métiers de l'industrie** *www.mecavenir.com*

ESSAIS

- **Eiffel par Eiffel** *Philippe Coupérie-Eiffel*
- **101 petits secrets d'architecture qui font les grands projets** *Matthew Frederick*
- **Petite philosophie de l'ingénieur** *Franck Guarnieri et Sébastien Travadel*
- **Les ingénieurs de la Renaissance** *Bertrand Gille*

LIVRES ILLUSTRÉS

- **507 Mouvements mécaniques** *Henri Brown*
- **760 mouvements mécaniques** *Georges Vander Haeghen*

DICTIONNAIRES

- **Lexique spécialisé en 4 langues** *www.techniques-ingenieur.fr/lexique.html*
- **Dictionnaire Des Sciences De L'ingénieur** *éditions Foucher*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

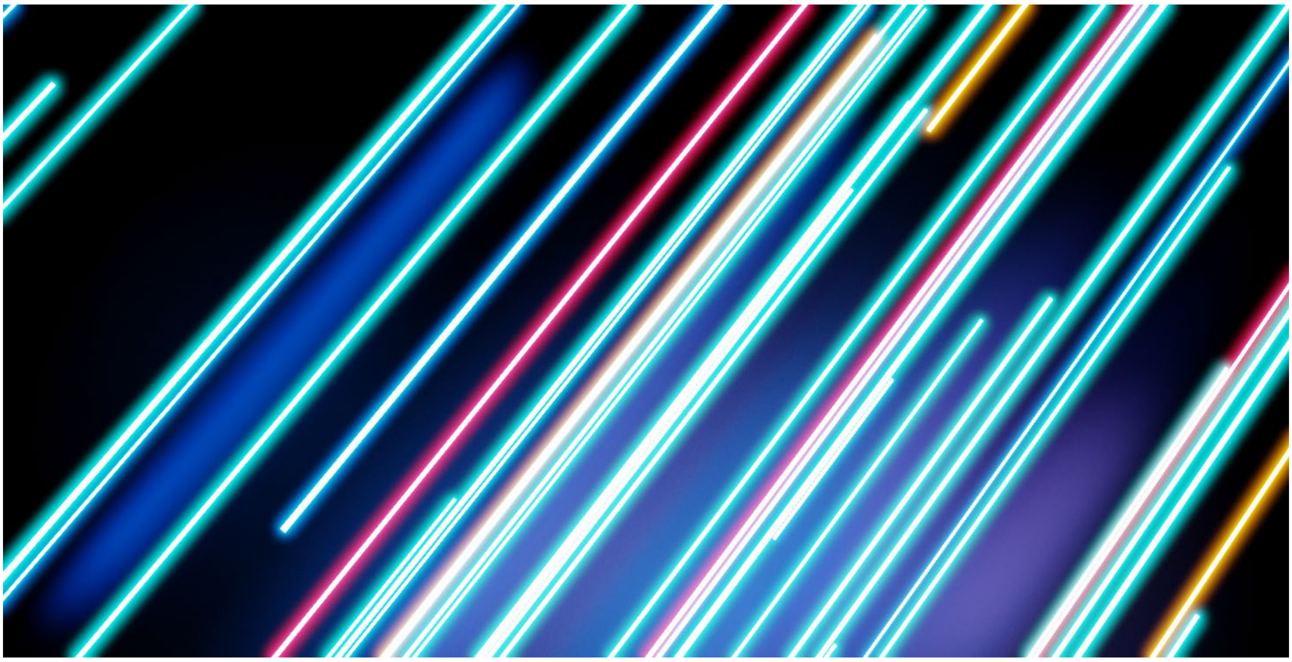
- **Megastructures** *National Géographic Vidéos*
- **Sept merveilles du monde industriel (7 épisodes)** *BBC*

PODCASTS

- **La méthode scientifique** *France Culture*
- **Les podcasts du CEA** www.cea.fr

Le Cours

INTRODUCTION

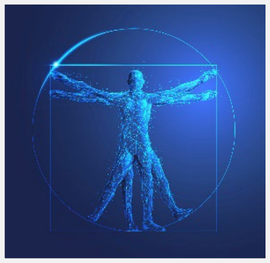


La plupart des produits comportent des parties **mobiles**, qui peuvent bouger les unes par rapport aux autres. On pense notamment aux moyens de transport (automobile, transport ferroviaire, aéronautique, aérospatial, etc.), mais c'est aussi le cas des produits de loisir (drones, manettes de jeux-vidéo, certains articles de sport, etc.), des machines industrielles (bras robots, convoyeurs, chaînes de production robotisées, centre d'usinage, etc.), etc. C'est aussi le cas des objets du quotidien (paires de ciseaux, lunettes, poignées de porte, etc.). Enfin, le mouvement peut être virtualisé, quand il concerne l'animation 3D, les simulations numériques ou les moteurs physiques de jeux-vidéo par exemple.

Dans un produit, les pièces mobiles forment ce qu'on appelle des **assemblages mécaniques**. Un assemblage mécanique est composé de plusieurs pièces, qui vont se déplacer les unes par rapport aux autres. Pour pouvoir étudier les produits, l'ingénieur doit donc être capable d'analyser les **mouvements** des pièces. Pour cela, vous allez apprendre à utiliser un ensemble de concepts et d'outils mathématiques et physiques. Ces concepts et outils vous permettront de **modéliser** le mouvement d'une pièce, c'est-à-dire de représenter par des schémas, des diagrammes ou des formules le mouvement des pièces. La modélisation du mouvement permet ensuite d'effectuer des prévisions, afin de calculer la manière dont une pièce ou un produit va se déplacer. L'étude du mouvement s'appelle la **cinématique**, et sera le point central du premier chapitre de ce module.

Dans le second chapitre, vous irez un peu plus loin en réalisant une étude complète de quelques assemblages mécaniques. En plus d'étudier le mouvement, il faudra alors comprendre et modéliser ce qui crée le mouvement. Nous verrons que le mouvement peut être produit, ou transmis, par plusieurs phénomènes physiques que nous appellerons des **actions mécaniques**. L'étude des actions mécaniques, et de la manière dont elles sont transmises de pièce en pièce, dans un assemblage, s'appelle la **mécanique**.

.



BIENVENUE DANS LE MONDE DES MÉTIERS DE L'INGÉNIERIE !

Nous vivons actuellement dans un monde technologique et connecté qui a un impact majeur sur nos vies, que ce soit pour améliorer notre quotidien, le sécuriser ou tout simplement permettre l'établissement et le bon fonctionnement des infrastructures humaines que sont par exemple les usines, les réseaux de transport, les hôpitaux et l'ensemble des objets informatiques et connectés qui font notre quotidien. L'ingénierie est également au cœur de la réflexion globale pour la création du monde de demain, notamment en rapport avec les problématiques environnementales et économiques auxquelles font face les sociétés modernes.

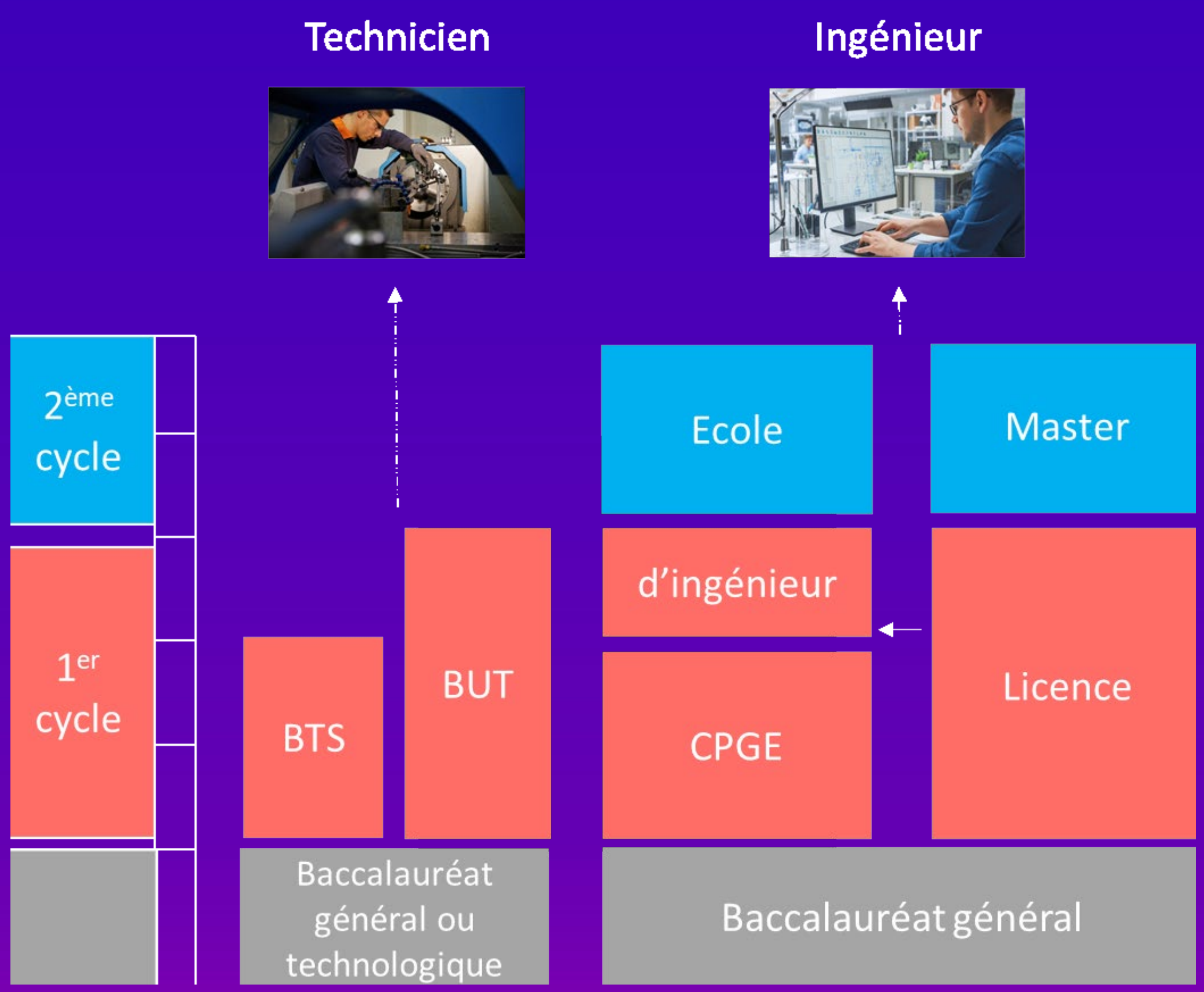
Comme vous l'aurez compris, les métiers de l'ingénierie sont donc essentiels et omniprésents dans nos vies personnelles et professionnelles. Suivant les appétences de chacun, les domaines d'étude et d'application sont extrêmement variés comme les biotechnologies, la domotique, l'informatique, le génie civil, les systèmes et réseaux, le génie civil., etc.

Deux grands types de profils se trouvent impliqués dans ces grands défis. D'un côté les techniciens, qui seront au cœur des réalisations avec des taches précises qui pourront prendre par exemple la forme d'application de protocoles, de la gestion et la maintenance des appareils ou bien de la réalisation de test et d'essais. A leurs côtés, les ingénieurs auront eux un rôle plus large et décisionnel, que ce soit pour créer, piloter ou bien assurer la gestion humaine des différents projets. Les ingénieurs pourront également évoluer au cours de leur carrière vers des fonctions de direction et de développement.

COMMENT ACCÉDER À CES MÉTIERS ?

Pour devenir **technicien**, il vous faudra tout d'abord obtenir un baccalauréat général à tonalité scientifique (enseignements de spécialité à choisir suivant les domaines d'études visés) ou bien un baccalauréat technologique. Une fois le diplôme obtenu, différentes formations préparent au métier de technicien. Le Brevet de Technicien Supérieur (BTS) mène à un diplôme de niveau Bac +2 et il vous faudra choisir votre formation en fonction du domaine d'étude visé. Vous pourrez également accéder au titre de technicien par un Bachelor Universitaire de Technologie (BUT, de niveau Bac +3) en choisissant tout comme pour le BTS une formation correspondant au domaine d'activité qui vous passionne.

Pour devenir **ingénieur**, nous vous conseillons un baccalauréat à tonalité scientifique en privilégiant, au choix et suivant votre projet professionnel, les enseignements de spécialités en science fondamentale que sont la Physique-Chimie et les Mathématiques, et bien sur les Sciences de l'Ingénieur. Les enseignements de Mathématiques Experte et d'Informatique seront également importants pour posséder les connaissances et compétences transverses nécessaires à la bonne réalisation de ce métier. Suite à l'obtention de votre diplôme, la voie royale pour devenir ingénieur passera par les Ecoles d'ingénieurs généralistes ou spécialisés dans le domaine souhaité. Ces formations sont accessibles par concours après deux années de classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE, formation sélective à privilégier pour accéder aux meilleurs établissements). De plus en plus d'écoles proposent également des classes préparatoires intégrées pour une admission postbac, souvent moins sélectives que la CPGE mais il est à noter que ces formations sont de plus en plus reconnues professionnellement et constitue une voie d'avenir pour accéder aux métiers de l'ingénierie. Il est également possible d'accéder à ce métier par la filière universitaire, en suivant un Master en ingénierie. Ces deux formations vous amèneront à des diplômes de niveau Bac + 5.



Dans chacun des modules de notre discipline, nous vous présenterons différentes spécialités d'ingénierie, en lien avec le domaine étudié, au travers de la présentation de différents métiers d'ingénieur. Nous vous donnerons des pistes pour vous y plonger au travers de recommandations de visites, de vidéos, d'interviews, voire même de MOOC accessibles et gratuits.

Ainsi dans ce module vous découvrirez les métiers suivants

- Ingénieur IoT
- Ingénieur IA
- Ingénieur satellite
- Ingénieur réseau

Le mot **cinématique** vient du grec kinematikos, qui veut dire **mouvement**. Le même mot grec a aussi donné le terme cinéma (tographe) en français, qui à l'origine, sert à désigner des images en mouvement.

La cinématique est la branche des sciences de l'ingénieur dans laquelle on étudie le mouvement. Elle est fondamentale dans de nombreux domaines tels que l'automobile, l'aéronautique, l'aérospatial, la robotique ou l'animation 3D (effets spéciaux, films d'animation, jeux vidéo, etc.). En cinématique, on étudie le mouvement des objets, qu'on va modéliser (= représenter) sous la forme de :

- **solide**, c'est-à-dire d'objet en trois dimensions, avec une forme et une masse.
- **point**, qui peut appartenir à un solide, ou parfois servir à modéliser un solide de petite dimension.

La cinématique se concentre sur l'étude du mouvement en lui-même, sans s'attacher à en expliquer les causes ou les effets. Dans ce premier chapitre, nous ne nous occuperons donc pas d'expliquer pourquoi les solides et les points sont mis en mouvement, ou de déterminer leurs énergies cinétiques. En revanche, nous apprendrons, en détail, à décrire et calculer les **positions**, les **vitesses** et les **accélérations** des objets en mouvement, au cours du temps.

COMPÉTENCES VISÉES

- Modéliser les mouvements.
- Déterminer les grandeurs géométriques et cinématiques d'un mécanisme.
- Proposer et justifier des hypothèses ou simplification en vue d'une modélisation.
- Mécanique du point.
- Mécanique du solide.

PRÉ-REQUIS

- Mathématiques : manipulation de vecteurs et lecture graphique dans l'espace, résolution d'équation du premier et second degré, dérivation.

Première approche
Le mouvement

Prenons une voiture, qui se déplace sur une route, plate et sans virage, à une vitesse constante de 80km/h :

À VOUS DE JOUER 1

1. Décrivez le mouvement de la voiture dans son ensemble, avec ces termes : trajectoire, vitesse, accélération, par rapport à la route, constante, nulle.

....

....

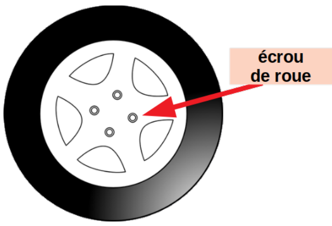
2. Décrivez le mouvement d'un écrou de roue, par rapport au centre de sa roue, avec ces termes : rotation, vitesse de rotation, cercle, autour du centre de la roue, constante.

....

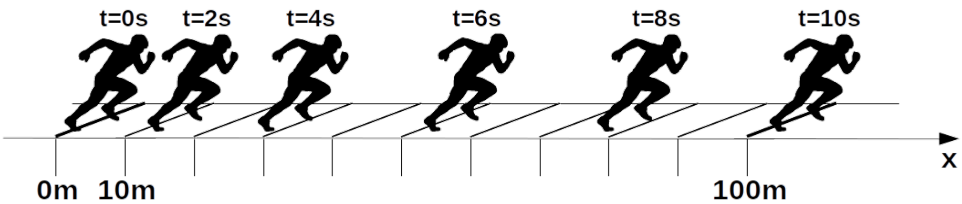
....

....

....



Prenons maintenant un coureur de 100m. Voici un résumé graphique de sa course :



À VOUS DE JOUER 2

1. Décrivez le mouvement du coureur durant les 5 premières secondes de course, avec ces termes : position, axe x, vitesse, accélère, augmente, par rapport à la piste, ligne droite, trajectoire.

....

....

2. Décrivez le mouvement du coureur durant les 5 dernières secondes, avec ces termes : vitesse, accélère, constante, par rapport à la piste, ligne droite, trajectoire.

....

....

Enfin, voici un dernier exemple, où l'on va analyser le mouvement d'une nacelle d'une grande roue :

À VOUS DE JOUER 3

1. Décrivez le mouvement d'une nacelle avec ces termes : trajectoire, vitesse, par rapport au centre de la grande roue, circulaire, constante.

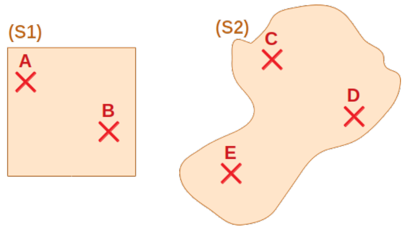
01 CINÉMATIQUE
Référentiel et mouvement

SOLIDE

Dans un premier temps, nous allons étudier les mouvements de ce qu'on appelle un **solide**. Un solide est un objet, qui peut être un produit, une personne, une pièce, etc. Nous noterons/nommerons généralement les solides qu'on étudie **(S)**. Un solide comporte plusieurs points.

EXEMPLES

Soient deux solides, nommés (S1) et (S2). (S1) comporte les points A et B. (S2) comporte les points C, D et E.



Nous considérerons que les solides qu'on étudie ne se déforment pas. Nous considérerons que les solides ont une répartition de leur masse homogène.

RÉFÉRENTIEL, REPÈRE ET BASE

- **Référentiel**

Les mouvements d'un solide (S) sont étudiés dans un **référentiel**. Ce référentiel comporte trois dimensions spatiales et une dimension temporelle. On considère le référentiel comme étant galiléen, ce qui signifie qu'on le considère comme étant parfaitement fixe dans l'espace.

La notion de référentiel galiléen sera approfondie en physique.

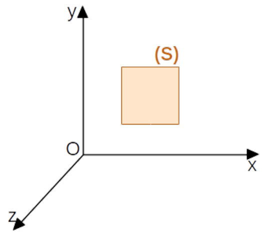
- **Repère**

Ce référentiel est muni d'un **repère**, qu'on notera R, et qui permet de représenter les trois dimensions spatiales du référentiel. Le repère R possède un **point d'origine**, qu'on notera O. Trois **axes** orthogonaux partent du point O, les axes x, y et z.

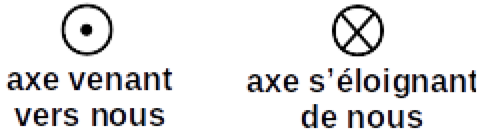
Des axes orthogonaux sont des axes perpendiculaires les uns par rapport aux autres.

EXEMPLES

Le solide S est représenté dans un référentiel muni du repère R, ayant pour origine le point O, et pour axes : x, y et z.

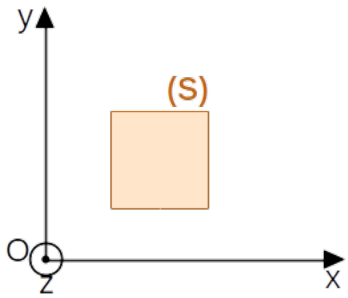


Parfois, le repère est représenté « à plat », ce qui fait que l'un des axes n'est pas visible. On le représente alors par l'un des deux symboles suivants, selon que l'axe vient vers nous ou s'éloigne :



EXEMPLES

Le solide S est représenté dans un référentiel muni du repère R, ayant pour origine le point O, et pour axes : x, y et z.
Ici, le repère est représenté « à plat », et on utilise le symbole ⊙ pour préciser que l'axe z vient vers nous.

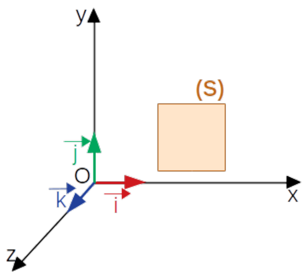


- **Base**

Le repère R est muni d'une **base** de trois vecteurs orthogonaux et orthonormaux, qui suivent ses trois axes. Ces vecteurs sont nommés $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$. $\vec{\imath}$ se trouve sur l'axe x, $\vec{\jmath}$ se trouve sur l'axe y et $\vec{k}$ se trouve sur l'axe z. Le repère R peut alors être noté $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Une base est un ensemble de vecteurs orthogonaux.

EXEMPLES

Le solide S est représenté dans un référentiel muni du repère R, ayant pour origine le point O, et pour axes : x, y et z. Ce repère est muni d'une base de trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$. R peut se noter $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

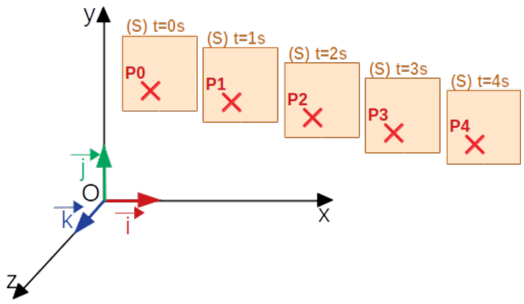


TRAJECTOIRE

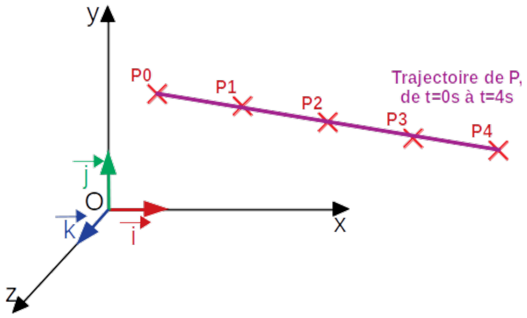
Lorsqu'un solide se déplace, les points qui le composent changent de position au cours du temps, dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Si l'on choisit un point P, et qu'on relie par un trait toutes les positions qu'il aura occupées au cours du temps, on obtient la **trajectoire** du point P.

EXEMPLES

Le solide S est en mouvement durant 4s, il comporte un point P. Voici cinq positions occupées par le solide au cours du temps, avec P0, P1, P2, P3 et P4 les positions du point P à chacun de ces instants :

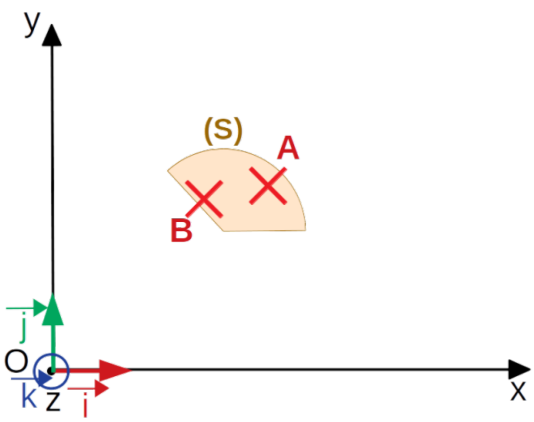


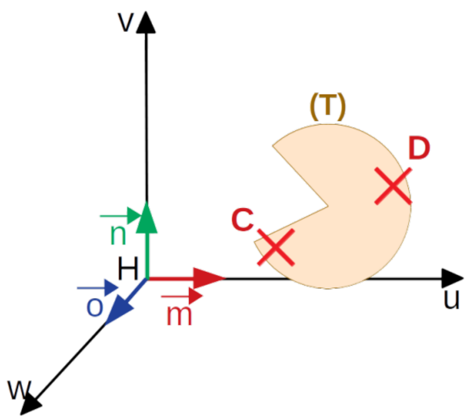
Si on relie les positions occupées par P, au cours du temps, on obtient la trajectoire du point P :



À VOUS DE JOUER 4

Soit les deux graphes suivants :





Graphe de gauche :

1. Comment est noté/s'appelle le solide ? Quels points contient-il ?

....

2. Comment sont nommés les axes du repère dans lequel se trouve le solide ? Quelle est l'origine du repère ?

....

3. Quelle est la base de ce repère ?

....

....

4. Est-ce-que l’axe z est dirigé vers nous ? ou rentre-il dans la page ?

Graphe de droite :

5. Comment est noté/s’appelle le solide ? Quels points contient-il ?

6. Comment sont nommés les axes du repère dans lequel se trouve le solide ? Quelle est l’origine du repère ?

7. Quelle est la base de ce repère ?

TRANSLATION

L’ESSENTIEL

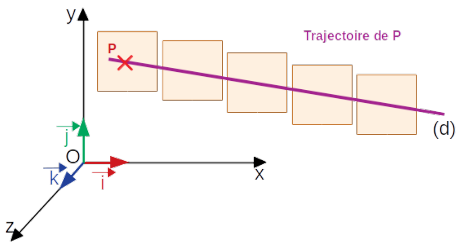
La translation est l’un des deux mouvements élémentaires. Lors d’un mouvement de translation, tous les points du solide (S) se déplacent en suivant des trajectoires qui sont parallèles les unes par rapport aux autres.

- **Translation rectiligne**

Lors d’un mouvement de **translation rectiligne**, la trajectoire de l’ensemble des points du solide S est une ligne droite.

EXEMPLES

Voici cinq positions successives occupées par le solide S, en translation rectiligne. La trajectoire est la droite (d) :

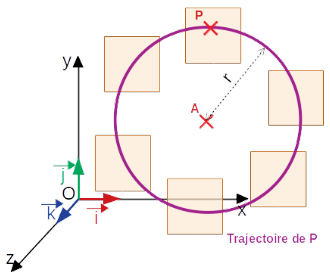


- **Translation circulaire**

Lors d’un mouvement de **translation circulaire**, la trajectoire de l’ensemble des points du solide S est un cercle.

EXEMPLES

Voici six positions successives occupées par le solide S, en translation circulaire. La trajectoire est le cercle de centre A et de rayon r :

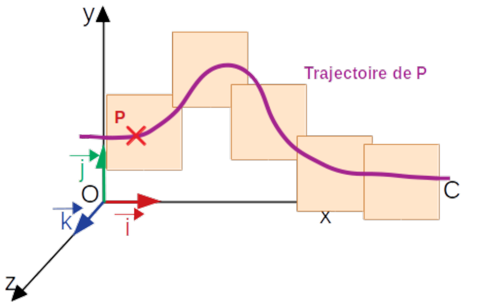


- **Translation curviligne**

Lors d'un mouvement de **translation curviligne**, la trajectoire de l'ensemble des points du solide S est une trajectoire quelconque (une courbe par exemple).

EXEMPLES

Voici cinq positions successives occupées par le solide S, en translation quelconque. La trajectoire est la courbe C :

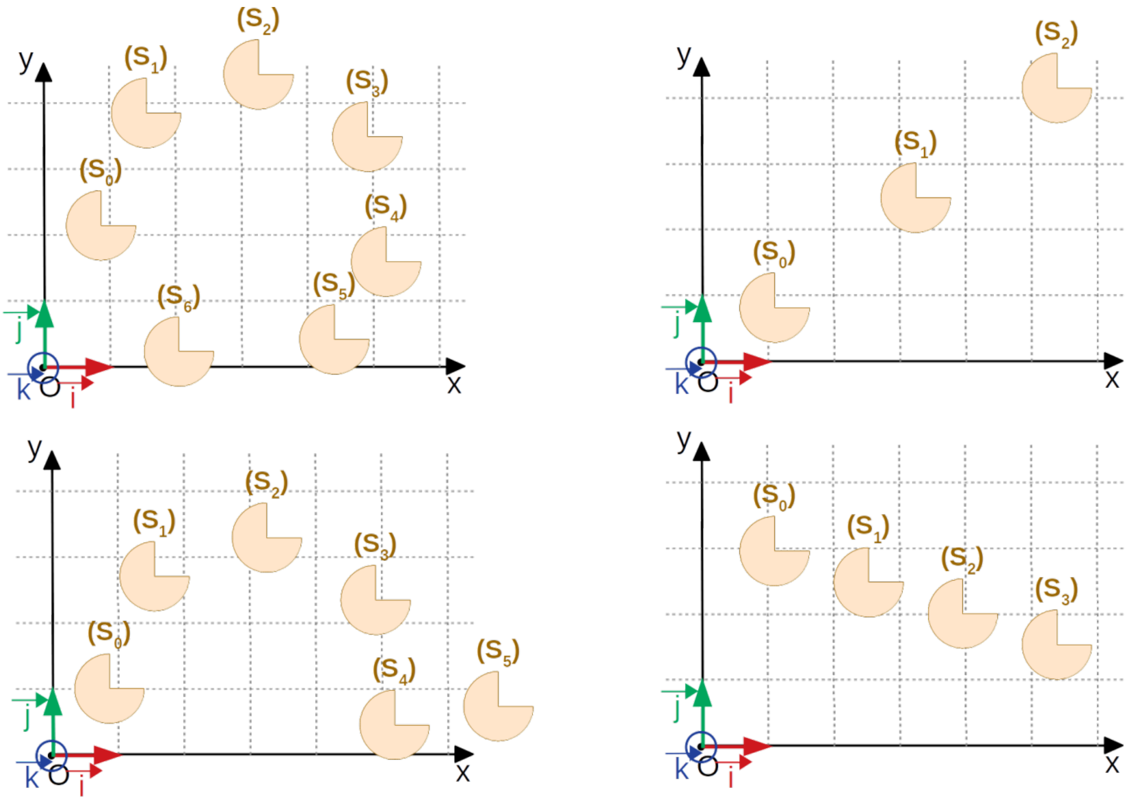


- **Translation quelconque**

Enfin, il est possible que la trajectoire ne soit ni une droite, ni un cercle, ni une courbe, on dira alors que la translation est quelconque.

À VOUS DE JOUER 5

Soit les quatre graphes ci-dessous, dans lesquels sont présentées, au cours du temps, les positions successives d'un solide (S) en translation :



1. Dans chaque graphe, dessinez la trajectoire du solide (S).
2. Dans le premier graphe (en haut, à gauche), dans quel type de translation est le solide (S) ?

----

3. Dans le deuxième graphe (en haut, à droite), dans quel type de translation est le solide (S) ?

----

4. Dans le troisième graphe (en bas, à gauche), dans quel type de translation est le solide (S) ?

....

5. Dans le dernier graphe (en bas, à droite), dans quel type de translation est le solide (S) ?

....

ROTATION

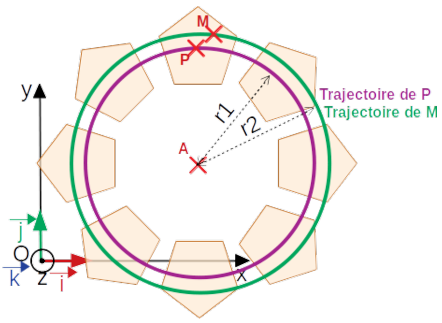
L'ESSENTIEL

La rotation est le second mouvement élémentaire. Lors d'un mouvement de rotation, tous les points du solide (S) se déplacent en suivant des cercles. Ces cercles sont tous centrés autour d'un même point A. Ce point A est le centre de la rotation.

On dit que les trajectoires des différents points du solide sont des cercles concentriques. Concentrique signifie « ayant le même centre ».

EXEMPLES

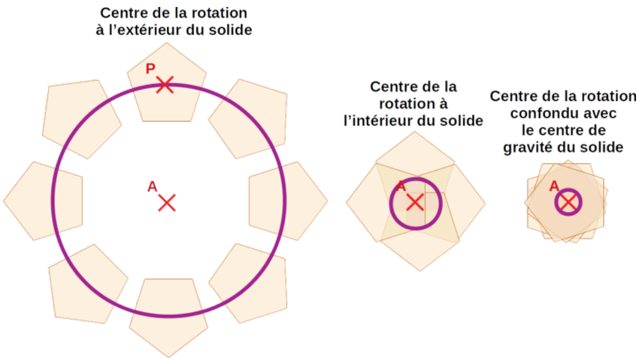
Voici huit positions successives occupées par le solide S, en rotation de centre. Les trajectoires des points P et M sont des cercles concentriques, de centre A. Par contre, les rayons des cercles représentant les trajectoires sont différents : r1 pour le point P et r2 pour le point M.



Plus un point est éloigné du centre de rotation, plus le chemin qu'il parcourt est grand. La différence entre une translation circulaire et une rotation est que lors de la translation circulaire, le solide a l'air de « glisser », alors que lors de la rotation, il tourne. Cela a pour effet que dans une translation circulaire, tous les points ont des trajectoires parallèles, ce qui n'est pas le cas en rotation.

- **Positon du centre de rotation**

Le centre de rotation peut se trouver à l'intérieur du solide, ou à l'extérieur du solide. Le centre de la rotation peut même être le centre du solide, dans ce cas le solide tourne sur lui-même :



MOUVEMENT PLAN ET AXE DE ROTATION

L'ESSENTIEL

Certains mouvements se font uniquement dans deux dimensions, c'est-à-dire dans un plan : on parle alors de mouvement plan.

On parle aussi parfois de problème plan, quand on veut résoudre un problème lié à un mouvement plan.

L'étude des mouvements plans est plus simple, que celle des mouvements spatiaux, en trois dimensions. Ainsi, dès qu'on le peut, on précise que le mouvement qu'on étudie est plan : cela nous permet de justifier plusieurs simplifications que l'on fait par la suite.

Nous étudierons très souvent des mouvements plans, qui se dérouleront uniquement sur les axes x et y, dans le plan qu'on notera $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Tous les exemples présentés précédemment sont des mouvements plans, dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

L'ESSENTIEL

Les mouvements élémentaires sont des mouvements plans.

En choisissant bien le repère, on peut toujours s'arranger pour étudier le mouvement sur uniquement deux axes.

- **Axe de rotation**

L'ESSENTIEL

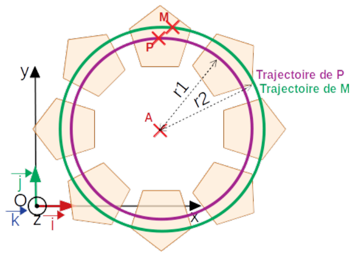
Les mouvements de rotation, et de translation circulaire se font autour d'un axe de rotation, qui peut se définir comme la droite, qui, à la fois :

- est perpendiculaire au plan du mouvement ;
- passe par le centre du mouvement.

Si la rotation a lieu dans le plan$(O, \vec{x}, \vec{z})$, alors l'axe de rotation est parallèle à l'axe $\vec{y}$.

EXEMPLES

Si on reprend l'exemple suivant, l'axe de rotation du solide S est (Az), la droite qui passe par A et qui est parallèle à l'axe z.



MECAPI 1 - MOUVEMENTS

Regardez cette vidéo de présentation de MecaPi : https://youtu.be/ezsYYjmXx7c

MecaPi fonctionne avec tous les navigateurs-web, y compris sur mobile, mais possède la meilleure fluidité avec une version récente de Google Chrome.

Sur **MecaPi** (http://cours-pi.nairod.eu/mecapi/), rendez-vous dans l'onglet **Mouvement**.

À VOUS DE JOUER 6

1. Quel point sert d'origine au repère associé au référentiel dans lequel le solide se déplace ?

----

2. Comment sont nommés les axes du repère ?

----

3. Quelle base est liée au repère ?

---

4. Comment peut-on noter le repère, de manière à indiquer son origine et sa base ?

Pour chacune des animations, répondez aux trois questions suivantes :

5. Quel est le mouvement du solide (translation, rotation, autre) ? Si c'est une translation, vous préciserez son type (rectiligne, circulaire, curviligne, quelconque).

6. Quelle est la trajectoire du solide (rotation sur lui-même, droite, cercle, courbe, quelconque) ? Vous préciserez :
   - la direction, et le sens, si la trajectoire est linéaire. La direction peut être une droite ou un axe ;
   - le centre et l'axe si la trajectoire est circulaire ou si le solide tourne sur lui-même. Vous indiquerez aussi si la trajectoire ou la rotation se fait dans le sens trigonométrique ou anti-trigonométrique (=horaire). Enfin, vous indiquerez, quand c'est possible, le rayon du cercle en nombre de graduations du repère.

7. Le mouvement est-il plan par rapport au repère ? Si oui, précisez le plan dans lequel se déroule le mouvement.

---

02 CINÉMATIQUE
Position d'un point

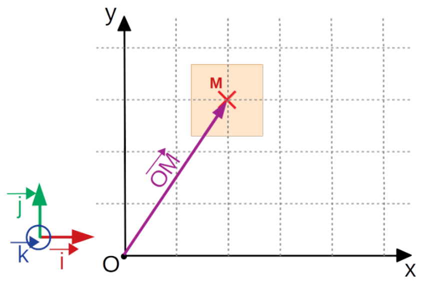
PREMIÈRE APPROCHE

L'ESSENTIEL

Soit M, un point appartenant au solide (S). Sa position dans le repère $\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ peut-être modélisée par un vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, qu'on appelle vecteur position de M. La position s'exprime en m.

EXEMPLES

Dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, la position du point M est modélisée par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = (2{,}3{,}0)$.



POSITION EN FONCTION DU TEMPS

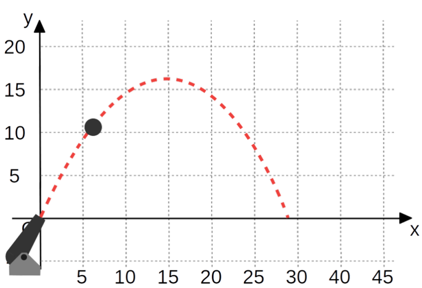
L'ESSENTIEL

La position d'un point peut aussi être exprimée avec des fonctions de t. On la notera alors :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}(\boldsymbol{t})} = \left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\right) \text{ ou, pour une meilleure lisibilité, } \overrightarrow{\boldsymbol{OM}(\boldsymbol{t})} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix}$$

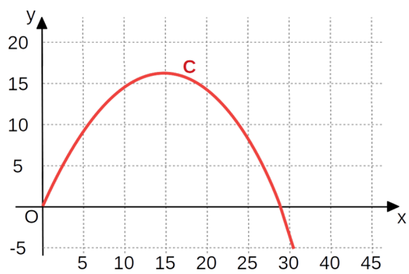
EXEMPLES

Dans une série d'exemples, nous allons étudier le mouvement d'un boulet de canon. Les axes sont gradués en mètres.



On va considérer le boulet comme un point M, qui se déplace suivant la trajectoire représentée par la courbe C. La position de M est exprimée par le vecteur :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t \\ -5t^2 + 18t \\ 0 \end{pmatrix}$$



La trajectoire de M est une parabole.

DÉTERMINATION DE LA POSITION À UN INSTANT T

Quand on connaît les fonctions exprimant la position de M, en fonction du temps, il est possible de calculer la position exacte à un instant t.

EXEMPLES

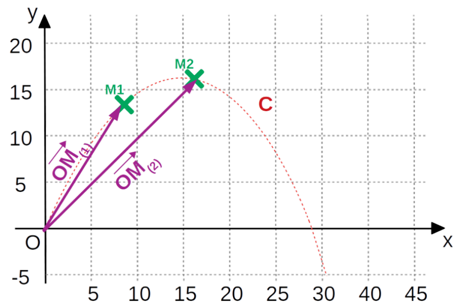
En poursuivant avec l'exemple du boulet de canon, on a :

- Pour t=1s, on a :

$$\overrightarrow{OM(1)} = \begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \\ z(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 1 \\ -5 \times 1^2 + 18 \times 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 + 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour t=2s, on a :

$$\overrightarrow{OM(2)} = \begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \\ z(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 2 \\ -5 \times 2^2 + 18 \times 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 + 36 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Quand la trajectoire d'un point n'est pas connue, il suffit alors de placer le point sur le repère, pour plusieurs valeurs de t différentes, pour obtenir la trajectoire.

À VOUS DE JOUER 7

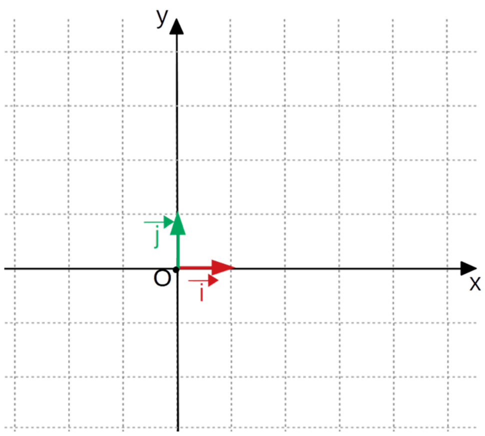
Soit un point N et un point P, dont on va étudier le mouvement dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La position de ces points est connue grâce à leurs vecteurs positions :

$$\overrightarrow{ON(t)} = \begin{pmatrix} 2t \\ t-2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OP(t)} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) - 2 \\ 2\sin(t) + 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Pourquoi l'expression de ces deux vecteurs position comporte-t-elle un 0 ?

----

2. Dans le repère ci-dessous, tracez les vecteurs positions $\overrightarrow{ON(-0{,}5)}$ et $\overrightarrow{ON(1{,}5)}$:



3. Déterminez les coordonnées des points N_{-1}, N_0, N_1 et N_2, qui représentent la position du point N, pour t=-1s, t=0s, t=1s et t=2s (vous pouvez utiliser un tableur pour calculer les coordonnées (x,y) de chaque point).

4. Déterminez les coordonnées des points P_0, $P_{\pi/6}$, $P_{\pi/3}$, $P_{\pi/2}$, $P_{2\pi/3}$, P_π et $P_{3\pi/2}$, qui représentent la position du point P, pour t=0s, t=π/6s, t=π/3s, t=π/2s, t=2π/3s, t=πs et finalement t=3π/2s (vous pouvez utiliser un tableur pour calculer les couples (x,y) de chaque point).

5. À l'aide des points trouvés, dessinez l'allure de la trajectoire du point N dans le repère.
6. À l'aide des points trouvés, dessinez l'allure de la trajectoire du point P dans le repère.

7. De quel type est la trajectoire du point N ?

----

8. Parmi les propositions suivantes, de quel(s) type(s) peut être le mouvement du solide auquel appartient le point N ? Translation rectiligne, translation circulaire ou rotation.

----

9. De quel type est la trajectoire du point P ?

----

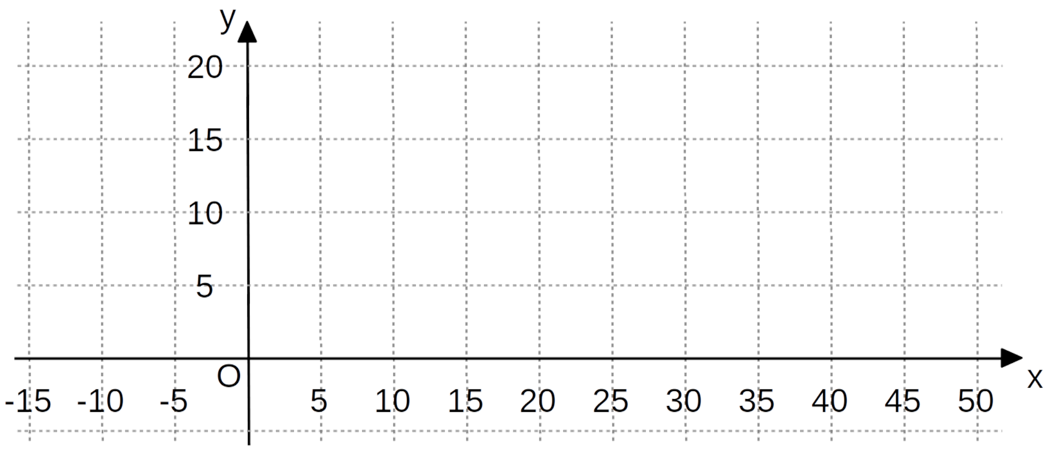
10. Parmi les propositions suivantes, de quel(s) type(s) peut être le mouvement du solide auquel appartient le point P ? Translation rectiligne, translation circulaire ou rotation ?

Soit le point M, dont le vecteur position est : $\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} 15t - 10 \\ -5t^2 + 20t \\ 0 \end{pmatrix}$

11. Dans le repère ci-dessous, gradué en mètres, tracez les vecteurs positions $\overrightarrow{OM(1)}$ et $\overrightarrow{OM(3)}$, correspondant à la position du point M à t=1s et t=3s :

12. Placez en plus les points correspondant aux positions de M pour t=0s, t=2s et t=5s.

13. Tracez la trajectoire du mouvement.



14. Comment se nomme ce type de trajectoire ?

OBTENTION DE T EN FONCTION DE LA POSITION

Quand on connaît les fonctions exprimant la position de M, en fonction du temps, il est aussi possible de retrouver la, ou les, valeurs possibles de t, pour une position donnée.

EXEMPLES

Continuons avec le boulet de canon : il peut être intéressant de déterminer le temps t_{sol}, au bout duquel le boulet touchera le sol.

Cela correspond à la valeur de t pour laquelle le point M « touchera » l'axe x. Pour cette valeur, on devrait trouver $y(t_{sol})$ = 0m. On va donc partir de la fonction de y(t) : $y(t) = -5t^2 + 18t$

Comme on cherche les valeurs de t pour lesquelles y(t) = 0m, on va devoir résoudre l'équation suivante : $-5t^2 + 18t = 0$

C'est une équation du second degré ; pour la résoudre on va devoir calculer son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4 \times (-5) \times 0 = 18^2 = 324$$

Le discriminant étant positif, on a deux solutions :

$t_{sol1} = \frac{-b-\sqrt{(\Delta)}}{2a} = \frac{-18-18}{2\times(-5)} = \frac{-36}{-10} = 3{,}6$. Le boulet touchera donc le sol au bout de 3,6s.

$t_{sol2} = \frac{-b+\sqrt{(\Delta)}}{2a} = \frac{-18+18}{2\times(-5)} = \frac{0}{-10} = 0$, ce qui était évident, et qu'on aurait pu trouver sans faire de calcul !

En effet, pour t=0s, le boulet se trouve au point O, car il n'a pas encore été tiré.

À VOUS DE JOUER 8

Soit le point M, dont le vecteur position est : $\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} 15t - 10 \\ -5t^2 + 20t \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer, par le calcul, la valeur de t pour laquelle la trajectoire coupe l'axe x.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Déterminer, par le calcul, la valeur de t pour laquelle la trajectoire coupe l'axe y.

ÉQUATION DE LA TRAJECTOIRE DE M

Soit un mouvement plan, dont on connaît l'expression de la position d'un point M, en fonction de t. Il est parfois utile de pouvoir exprimer l'équation de la trajectoire de M sous la forme d'une équation indépendante du temps : c'est-à-dire sous la forme y=f(x). Cela permet de l'étudier, comme une fonction classique, avec les outils vus en mathématiques : un tableau de signe, de calculer son maximum/minimum, etc.

EXEMPLES

Prenons l'expression de la position du boulet :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t \\ -5t^2 + 18t \\ 0 \end{pmatrix}$$

On va travailler avec les deux équations suivantes : $x = 8t$ et $y = -5t^2 + 18t$
En modifiant la première, on obtient : $t = \frac{x}{8}$
On injecte alors la première équation dans la seconde :

$$\begin{aligned} y &= -5t^2 + 18t \\ &= -5\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 18\left(\frac{x}{8}\right) \\ &= -\frac{5}{64}x^2 + \frac{18}{8}x \end{aligned}$$

Au final, on a l'équation de droite : $y = f(x) = -\frac{5}{64}x^2 + \frac{18}{8}x$

Avec cette équation, on peut « facilement » déterminer l'altitude maximale du boulet de canon. Pour cela, on va dériver $f(x) = -\frac{5}{64}x^2 + \frac{18}{8}x$ par rapport à x, puis faire un tableau de variation.

À VOUS DE JOUER 9

Attention, cet exercice est assez relevé, n'hésitez pas à refaire l'exemple précédent avant de vous lancer, puis éventuellement à vous aider de la correction.

Soit le point M, dont le vecteur position est : $\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} 15t - 10 \\ -5t^2 + 20t \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminez l'équation de la droite y=f(x).

2. Déterminez, par le calcul, la valeur de x, pour laquelle y est maximale.

3. Déterminez, par le calcul, la valeur maximale de y.

03 CINÉMATIQUE
Vitesse d'un point

Dans cette partie, nous allons nous concentrer sur l'analyse de la vitesse linéaire d'un point d'un solide. De plus, nous étudierons uniquement des mouvements plans, dans le plan$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: les valeurs de la position et de la vitesse linéaire sur l'axe z seront toujours nulles.

Le terme linéaire signifie qu'on étudie la vitesse pour un mouvement « en ligne droite », c'est-à-dire pour un mouvement de type translation. Dans la suite du chapitre, on étudiera les vitesses angulaires, pour les mouvements de type rotation.

PREMIÈRE APPROCHE

L'ESSENTIEL

Le mouvement d'un point d'un solide, est caractérisé par sa vitesse linéaire. La vitesse linéaire permet de donner la variation de la position du solide, en fonction du temps. Elle s'exprime en $m.s^{-1}$.

Soit M, un point appartenant au solide (S). Sa vitesse linéaire dans le repère $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ peut être modélisée par un vecteur $\vec{V} = (Vx, Vy, Vz)$, qu'on appelle vecteur vitesse linéaire de M.

La « vitesse linéaire » est parfois abrégée en simplement « vitesse ». On l'oppose à la « vitesse angulaire », que nous verrons un peu plus loin dans ce chapitre.

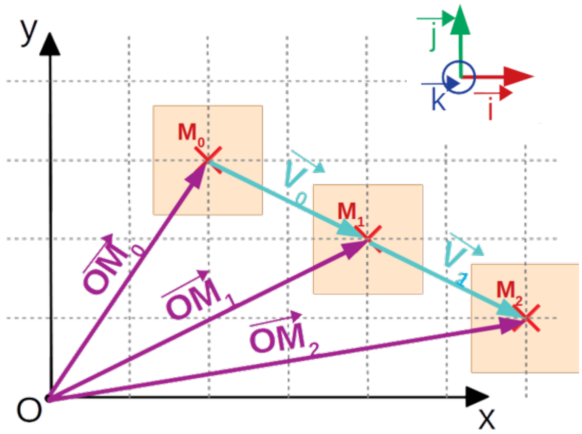
EXEMPLES

Dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, trois positions prises par le point M, appartenant au solide (S), sont représentées aux instants t=0s, t=1s et t=2s.

Pour chacun de ces instants, la position du point M est modélisée par son vecteur position :
$\overrightarrow{OM_0} = (2{,}3{,}0)$, $\overrightarrow{OM_1} = (4{,}2{,}0)$ et $\overrightarrow{OM_2} = (6{,}1{,}0)$

La vitesse à l'instant t=0s est représentée par le vecteur vitesse linéaire $\overrightarrow{V_0} = (2,-1{,}0)$. Elle représente la manière dont la position de M varie entre M0 et M1.

La vitesse à l'instant t=1s est représentée par le vecteur vitesse linéaire $\overrightarrow{V_1} = (2,-1{,}0)$. Elle représente la manière dont la position de M varie entre M1 et M2.



Dans cet exemple et le suivant, on a $\overrightarrow{V_0} = \frac{\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_0}}{t1-t0}$ et $\overrightarrow{V_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}}{t2-t1}$.

Dans le cas général, qu'on va voir juste après dans la partie b), la vitesse sera obtenue avec la formule suivante : $\overrightarrow{V(t)} = \lim\limits_{n\to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+n)-\overrightarrow{OM}(t)}{(t+n)-t}$. Cela reviendra à dériver $\overrightarrow{OM}(t)$par rapport au temps.

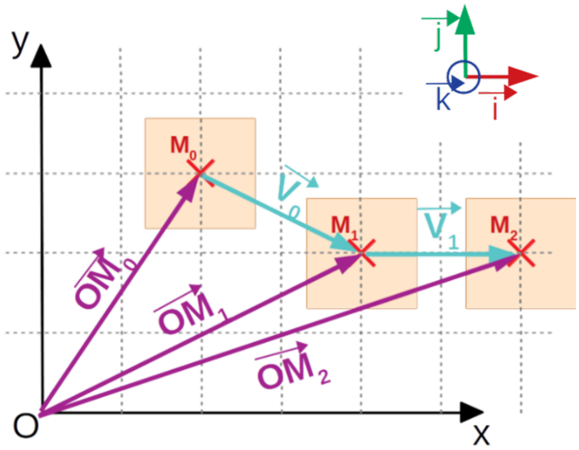
EXEMPLES

Dans le repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, trois positions prises par le point M, appartenant au solide (S), sont représentées aux instants t=0s, t=1s et t=2s.

Pour chacun de ces instants, la position du point M est modélisée par son vecteur position :
$\overrightarrow{OM_0} = (2{,}3{,}0)$,$\overrightarrow{OM_1} = (4{,}2{,}0)$ et $\overrightarrow{OM_2} = (6{,}2{,}0)$

La vitesse à l'instant t=0s est représentée par le vecteur vitesse linéaire $\overrightarrow{V_0} = (2,-1{,}0)$. Elle représente la manière dont la position de M varie entre M0 et M1.

La vitesse à l'instant t=1s est représentée par le vecteur vitesse linéaire $\overrightarrow{V_1} = (2{,}0{,}0)$. Elle représente la manière dont la position de M varie entre M1 et M2.



VITESSE LINÉAIRE EN FONCTION DU TEMPS

Quand le vecteur position est exprimé sous la forme d'un triplet de fonctions de t, on peut déterminer la vitesse d'un point en fonction de t. Pour cela, il faut dériver le vecteur position, par rapport au temps.

La position et la vitesse linéaire sont liées par la relation : $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{dOM}(\boldsymbol{t})}}{\boldsymbol{dt}}$

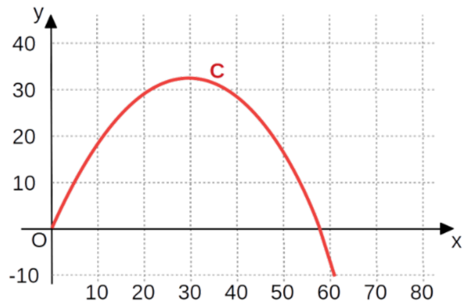
Avec $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}(\boldsymbol{t})} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix}$, on obtient : $\overrightarrow{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t})} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V_x}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{V_y}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{V_z}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{dx}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{dt}} \\ \frac{\boldsymbol{dy}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{dt}} \\ \frac{\boldsymbol{dz}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{dt}} \end{pmatrix}$

Dans le cas d'un mouvement plan, dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $V_z(t)$ est nulle.

EXEMPLES

Reprenons l'exemple du boulet de canon : Soit le point M, qui se déplace suivant la trajectoire représentée par la courbe C. La position de M est exprimée par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t \\ -5t^2 + 18t \\ 0 \end{pmatrix}$$



Si l'on souhaite exprimer le vecteur vitesse linéaire du point M, en fonction de t, alors on va dériver le vecteur position sur chaque axe :

Sur l'axe x, on obtient : $V_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = (8t)' = 8$

Sur l'axe y, on obtient : $V_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = (-5t^2 + 18t)' = -5 \times 2 \times t + 18 = -10t + 18$

Sur l'axe z, on obtient : $V_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = (0)' = 0$

Ainsi, le vecteur vitesse linéaire, en fonction du temps, s'exprime : $\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10t + 18 \\ 0 \end{pmatrix}$

DÉTERMINATION DE LA VITESSE LINÉAIRE À UN INSTANT T

Quand on connaît les fonctions exprimant la vitesse de M, en fonction du temps, il est possible de calculer sa vitesse exacte à un instant t.

EXEMPLES

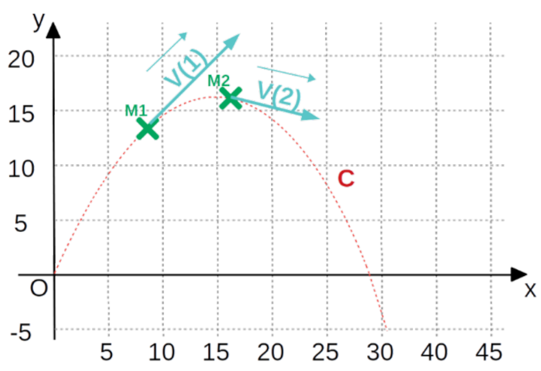
En poursuivant avec le boulet de canon, on a :

Pour t=1s, on a :

$$\overrightarrow{V(1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10t + 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \times 1 + 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour t=2s, on a :

$$\overrightarrow{V(2)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10t + 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \times 2 + 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire du point.

Tangent signifie que le vecteur vitesse linéaire « frôle » la trajectoire.

À VOUS DE JOUER ⑩

Soit le point N, dont le vecteur position est : $\overrightarrow{ON(t)} = \begin{pmatrix} 2t \\ t-2 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminez l'expression de $\vec{V}(t)$, le vecteur vitesse du point N.

....

....

....

....

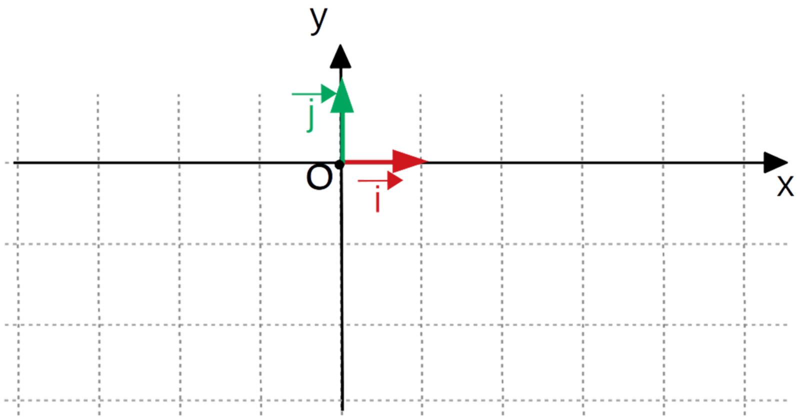
....

2. Est-ce-que ce vecteur vitesse dépend de t ? Que cela implique-t-il ?

....

....

3. Dans le graphe ci-dessous, placez les points N_0 et N_2, pour t=0s et t=2s :
4. Tracez ensuite les vecteurs vitesses $\vec{V}(0)$ et $\vec{V}(2)$, des points N_0 et N_2



Soit le point M, dont le vecteur position est :$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} 15t-10 \\ -5t^2+20t \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Déterminez l'expression de$\vec{V}(t)$, le vecteur vitesse du point M.

....

....

....

....

6. Est-ce-que ce vecteur vitesse dépend de t ? Que cela implique-t-il ?

....

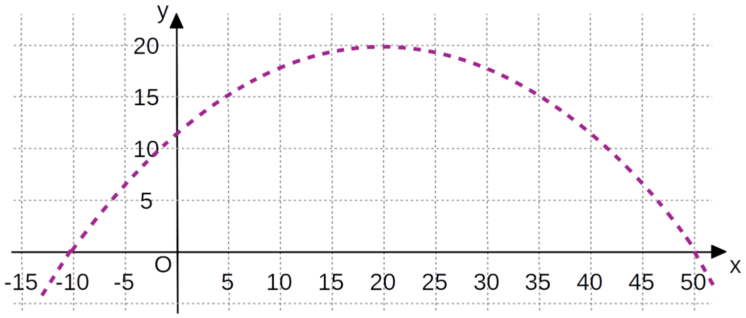
....

....

....

....

7. Dans le graphe ci-dessous (la courbe en pointillés est la trajectoire de M), placez les points M_0, M_1 et M_2, pour t=0s, t=1s et t=2s :
8. Tracez ensuite les vecteurs vitesses $\vec{V}(0)$, $\vec{V}(1)$ et $\vec{V}(2)$, des points M_0, M_1 et M_2.



9. Que peut-on dire des vecteurs vitesses, par rapport à la trajectoire de M ?

....

DÉTERMINATION DE LA NORME DE LA VITESSE LINÉAIRE

Enfin, il est aussi possible de calculer la norme du vecteur vitesse, c'est-à-dire la valeur de la vitesse en $m.s^{-1}$, indépendamment des axes du repère.

L'ESSENTIEL

La norme de la vitesse linéaire se calcule avec la relation suivante :

$$\boldsymbol{V = \|\vec{V}(t)\| = \sqrt{(V_x(t)^2 + V_y(t)^2 + V_z(t)^2)}}$$

EXEMPLES

Toujours avec le boulet de canon, on a :

Pour t=1s, on a :

$$V_1 = \|\vec{V_M}(1)\| = \sqrt{(Vx_M(1)^2 + Vy_M(1)^2 + Vz_M(1)^2)} = \sqrt{(8^2 + 8^2 + 0^2)} = \sqrt{(128)} \approx 11{,}3$$

Pour t=2s, on a :

$$V_2 = \|\vec{V_M}(2)\| = \sqrt{(Vx_M(2)^2 + Vy_M(2)^2 + Vz_M(2)^2)} = \sqrt{(8^2 + (-2)^2 + 0^2)} = \sqrt{(272)} \approx 8{,}25$$

Si le point M représente un boulet de canon, il possède donc une vitesse :

- de 11,3 $m.s^{-1}$ au bout de 1s ;
- de 8,25 $m.s^{-1}$, au bout de 2s.

À VOUS DE JOUER 11

1. Soit le point P, dont le vecteur vitesse est constant et vaut $\vec{V} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculez la norme de son vecteur vitesse.

....

....

....

2. Soit le point Q, dont le vecteur vitesse vaut $\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculez la norme de son vecteur vitesse pour t=1s.

....

....

....

....

....

04 CINÉMATIQUE
Accélération d'un point

Dans cette partie, nous allons nous concentrer sur l'analyse de l'accélération linéaire d'un point d'un solide. De plus, nous étudierons uniquement des mouvements plans, dans le plan$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: les valeurs de la position, de la vitesse et de l'accélération linéaires sur l'axe z seront toujours nulles.

PREMIÈRE APPROCHE

L'ESSENTIEL

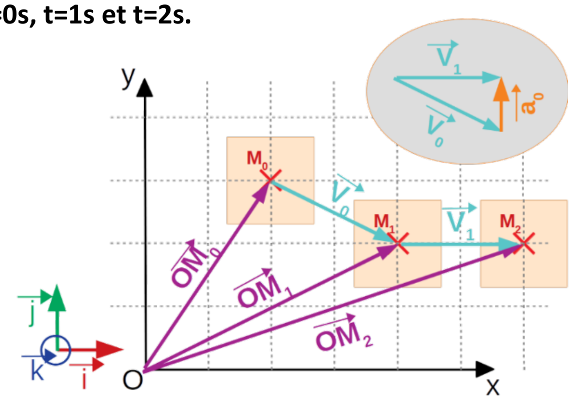
Le mouvement d'un solide, ou d'un point d'un solide, est caractérisé par son accélération linéaire. L'accélération linéaire permet de donner la variation de la vitesse linéaire du solide, en fonction du temps. Elle s'exprime en m.s^{-2}. Soit M, un point appartenant au solide (S). Son accélération linéaire dans le repère $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ peut être modélisée par un vecteur $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, qu'on appelle vecteur accélération linéaire de M.

« L'accélération linéaire » est parfois abrégée en simplement « accélération ». On l'oppose à « l'accélération angulaire », que nous verrons un peu plus loin dans ce chapitre.

EXEMPLES

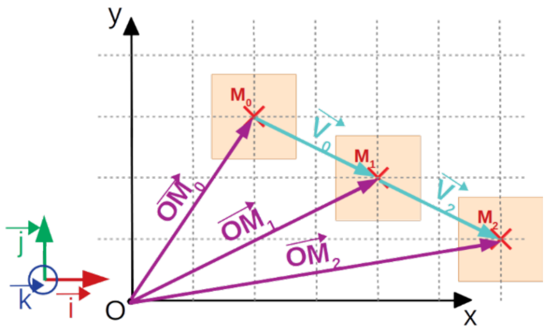
Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, trois positions prises par le point M, appartenant au solide (S), sont représentées aux instants t=0s, t=1s et t=2s.

Pour chacun de ces instants, la position du point M est modélisée par son vecteur position :
$\overrightarrow{OM_0} = (2{,}3{,}0), \overrightarrow{OM_1} = (4{,}2{,}0) \text{et} \overrightarrow{OM_2} = (6{,}1{,}0)$
On connaît aussi le vecteur vitesse linéaire :
$\overrightarrow{V_0} = (2, -1{,}0)$ et $\overrightarrow{V_1} = (2{,}0{,}0)$.
Il représente la manière dont la position de M varie entre M1 et M2.
Enfin, on a le vecteur accélération linéaire :
$\overrightarrow{a_0} = (0{,}1{,}0)$



Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, trois positions prises par le point M, appartenant au solide (S), sont représentées aux instants t=0s, t=1s et t=2s.

Pour chacun de ces instants, la position du point M est modélisée par son vecteur position :
$\overrightarrow{OM_0} = (2{,}3{,}0)$, $\overrightarrow{OM_1} = (4{,}2{,}0)$ et $\overrightarrow{OM_2} = (6{,}1{,}0)$
On connaît aussi les vecteurs vitesses linéaires :
$\overrightarrow{V_0} = (2, -1{,}0)$ et $\overrightarrow{V_1} = (2, -1{,}0)$.
Ici, l'accélération est nulle : $\overrightarrow{a_0} = (0{,}0{,}0)$



- **Translation uniforme et uniformément variée**

L'ESSENTIEL

Dans un mouvement de translation, si le vecteur accélération linéaire est nul, alors le mouvement est une translation uniforme (MTU).
Dans un mouvement de translation, si le vecteur accélération linéaire est constant, alors le mouvement est une translation uniformément variée (MTUV).

Cela signifie que la vitesse est tout le temps la même.

EXEMPLES

Si on reprend les deux exemples précédents, pour la partie du mouvement étudiée :

- dans le premier exemple, le mouvement n'est pas uniforme, car $\overrightarrow{a_0} = (0{,}1{,}0)$ n'est pas nul. Par contre c'est une translation uniformément variée, car $\overrightarrow{a_0}$ est constant (=ne dépend pas du temps).
- dans le second exemple, le mouvement est une translation uniforme, car $\overrightarrow{a_0} = (0{,}0{,}0)$ est nul.

ACCÉLÉRATION LINÉAIRE EN FONCTION DU TEMPS

Quand le vecteur vitesse est exprimé sous la forme d'un triplet de fonctions de t, on peut déterminer l'accélération d'un point en fonction de t. Pour cela, il faut dériver le vecteur vitesse linéaire, par rapport au temps.

L'ESSENTIEL

La vitesse et l'accélération linéaires sont liées par la relation : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$

Avec $\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \\ V_z(t) \end{pmatrix}$, on obtient : $\overrightarrow{a_M(t)} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dV_x(t)}{dt} \\ \frac{dV_y(t)}{dt} \\ \frac{dV_z(t)}{dt} \end{pmatrix}$

Dans le cas d'un mouvement plan, dans le plan$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $a_z(t)$ est nulle.

EXEMPLES

Reprenons l'exemple du boulet de canon. La position de M est exprimée par le vecteur position : $\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t \\ -5t^2 + 18t \\ 0 \end{pmatrix}$

Le vecteur vitesse linéaire, s'exprime : $\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10t + 18 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si l'on souhaite exprimer l'accélération du point M, en fonction de t, alors on va dériver le vecteur vitesse linéaire sur chaque axe :

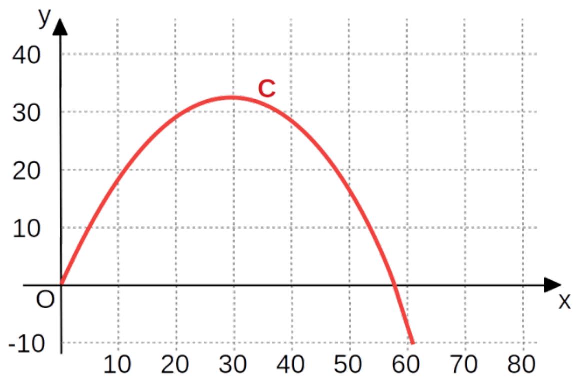
Sur l'axe x, on obtient : $a_y = \frac{dV_x(t)}{dt} = (8)' = 0$

Sur l'axe y, on obtient : $a_x = \frac{dV_y(t)}{dt} = (-10t + 18)' = -10$

Sur l'axe z, on obtient : $a_z = \frac{dV_z(t)}{dt} = (0)' = 0$

Ainsi, le vecteur accélération linéaire s'exprime :

$$\overrightarrow{a(t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Ici, l'accélération est constante.

À VOUS DE JOUER 12

Soit le point N, en translation rectiligne. Son vecteur position est

$\overrightarrow{ON(t)} = \begin{pmatrix} 2t \\ t-2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et son vecteur vitesse vaut $\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminez l'expression de $\vec{A}(t)$, le vecteur accélération du point N.

....

....

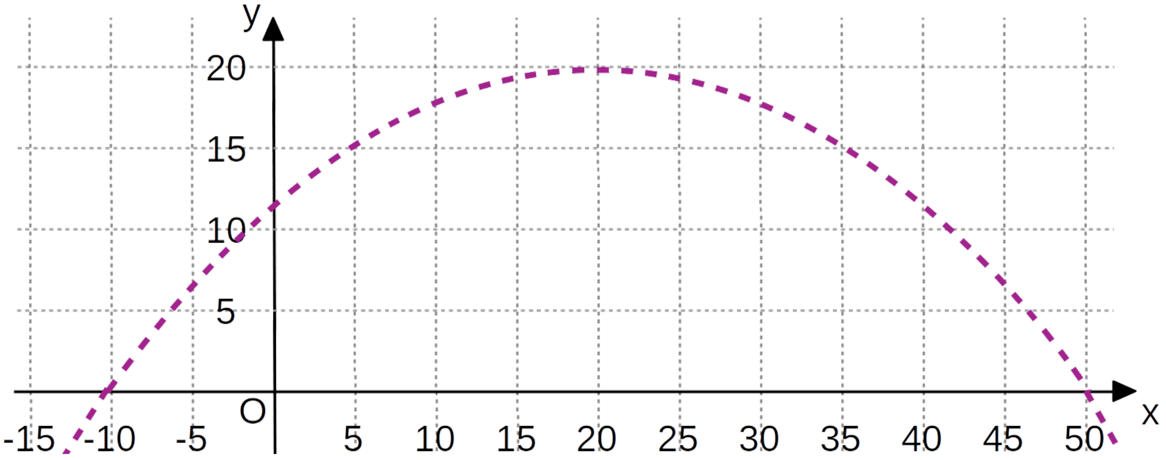
....

2. Déduire de la valeur de $\vec{A}(t)$, si le mouvement de N est un MRU ou un MRUV.

Soit le point M, dont le vecteur position est $\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} 15t - 10 \\ -5t^2 + 20t \\ 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur vitesse vaut $\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} 15 \\ -10t + 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Déterminez l'expression de $\vec{A}(t)$, le vecteur vitesse du point M.

4. Dans le graphe ci-dessous tracez les vecteurs accélération $\vec{A}(1)$, $\vec{A}(2)$et $\vec{A}(3)$, des points M_1, M_2 et M_3. :



DEVENIR INGÉNIEUR EN MÉCATRONIQUE

Des systèmes ou des produits intelligents qui perçoivent leur environnement, communiquent, traitent l'information et agissent en conséquence… De la science-fiction ? Non, de la mécatronique !

Formé aux domaines techniques de la mécatronique (mécanique / électronique / informatique / automatique / ingénierie système...), l'ingénieur est capable de faire la synthèse entre les différents experts métiers. Ses compétences spécifiques lui confèrent une approche collaborative et interdisciplinaire de l'expression du besoin jusqu'à la réalisation industrielle.
En favorisant la créativité et la conception innovante, l'ingénieur en mécatronique est un vecteur d'accélération pour l'industrialisation de solutions novatrices au sein de l'entreprise.

Vous voulez en voir plus ?

Visitez le Centre culturel numérique Saint-Exupéry à Reims et son FabLab
Trouvez le FabLab le plus proche de chez vous avec cette carte interactive : www.makery.info/labs-map
Visitez les portes ouvertes des Ecoles d'ingénieurs et des BTS, en présentiel et parfois en ligne d'ailleurs. Citons par exemple :

- *Licence pro mention métiers de l'industrie : mécatronique, robotique*
- *Ecoles d'ingénieur avec spécialisation en mécatronique : École nationale supérieure d'ingénieurs de Bretagne-Sud, Institut national des sciences appliquées Hauts-de-France, CNAM spécialité mécatronique en convention avec l'université de Poitiers*

Découvrez l'émission Eureka et son épisode « Trop Robot pour être vrai ? » sur France Culture.

05 CINÉMATIQUE
Cinématique du solide

Dans cette partie du chapitre, nous allons étudier le solide dans son ensemble, plutôt qu'un unique point comme lors des trois parties précédentes. Nous continuerons à étudier uniquement des mouvements plans, dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

PROPRIÉTÉS DES MOUVEMENTS ÉLÉMENTAIRES

Dans un premier temps, voici deux propriétés importantes concernant les mouvements de translation et de rotation.

- **Translation**

L'ESSENTIEL
Lorsqu'un solide est en translation, alors :
- tous ses points, à un instant t, possèdent le même vecteur vitesse.
- tous ses points, à un instant t, possèdent le même vecteur accélération.

On pourra aussi noter que :
- quand le vecteur accélération est nul, alors on obtient une **translation uniforme**.
- quand le vecteur accélération conserve la même direction au cours du temps, alors on obtient une **translation rectiligne**.

Rectiligne signifie en ligne droite, et uniforme signifie que le mouvement se fait à vitesse constante = l'accélération est nulle dans le cas d'une translation.

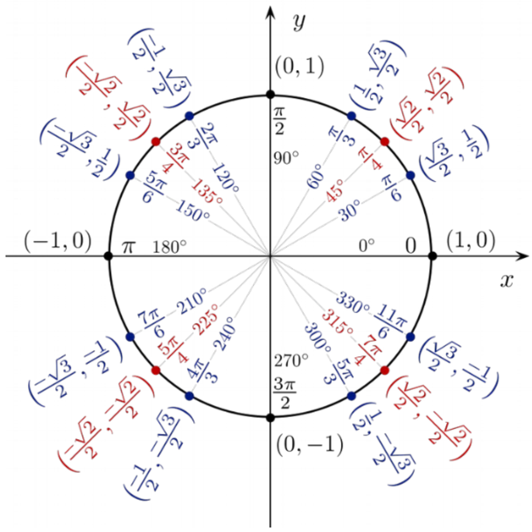
- **Rotation**

L'ESSENTIEL
Lorsqu'un solide est en rotation, alors tous ses points, à un instant t, possède des vecteurs vitesses dont les valeurs sont proportionnelles à leur distance par rapport au centre de la rotation.

On pourra aussi noter que :
- tous ses points, à un instant t, possèdent un vecteur vitesse tangent à leur trajectoire.
- tous ses points, à un instant t, possèdent des vecteurs accélérations qui sont orientés vers le centre de la rotation, dans le cas d'une rotation uniforme.

- **Rappel : cercle trigonométrique**

Au cours de cette partie, nous allons travailler avec les radians. Voici, pour rappel, le cercle trigonométrique, avec les principales valeurs angulaires :



POSITION ANGULAIRE

Nous avons vu que le mouvement d'un point d'un solide peut être caractérisé par une position, une vitesse et une accélération. Ces trois caractéristiques, linéaires, conviennent pour étudier et modéliser le mouvement d'un point ou d'un solide en translation. Dans le cas d'un solide en rotation, on doit aussi s'intéresser aux grandeurs suivantes : **position angulaire**, **vitesse angulaire** et **accélération angulaire**.

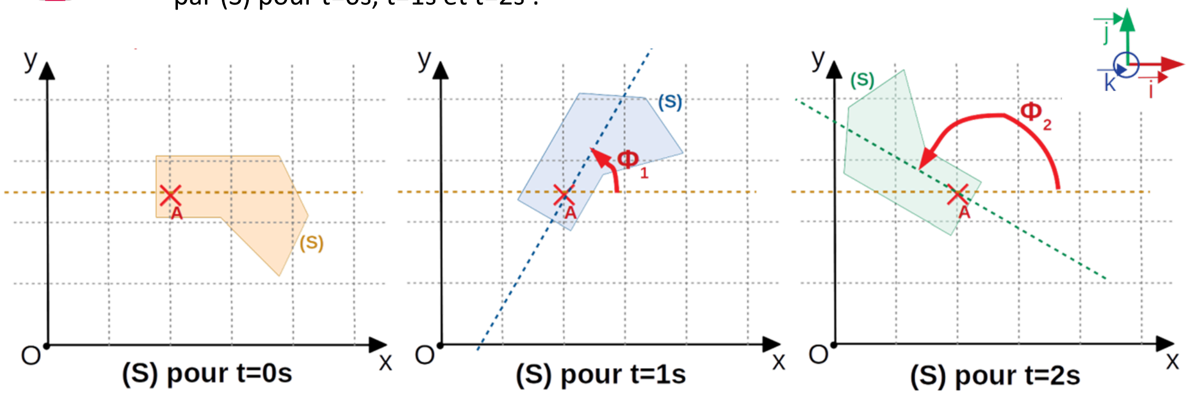
L'ESSENTIEL

La position angulaire, ou angle, d'un solide en rotation, représente l'angle suivant lequel le solide est orienté par rapport à son axe de rotation. Elle s'exprime en rad.

PREMIÈRE APPROCHE

EXEMPLES

Soit un solide (S), qui est en rotation autour du point A. Voici les positions occupées par (S) pour t=0s, t=1s et t=2s :



La position angulaire du solide (S), à un instant donné, correspond à l'angle entre sa position initiale et sa nouvelle position. Par exemple :

- à l'instant t=0s, la position angulaire de (S) est $\phi_0 = 0rad$.
- à l'instant t=1s, la position angulaire de (S) est $\phi_1 = \frac{\pi}{3}rad$.
- à l'instant t=2s, la position angulaire de (S) est $\phi_2 = \frac{5\pi}{6}rad$.

- **Vecteur position angulaire**

L'ESSENTIEL

La position angulaire peut être donnée sous la forme d'un triplet de fonctions de t.
On la notera alors $\overrightarrow{Pa(t)} = \big(\psi(t), \theta(t), \phi(t)\big)$ ou, pour une meilleure lisibilité,

$$\overrightarrow{Pa(t)} = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

- $\psi(t)$ l'angle du solide autour de l'axe x.
- $\theta(t)$ l'angle du solide autour de l'axe y.
- $\phi(t)$ l'angle du solide autour de l'axe z.

Les lettres grecques utilisées pour nommer les trois angles sont psi, théta et phi.
Tous les angles sont donnés en radians, et sont positifs dans le sens trigonométrique et négatifs dans le sens horaire.
Dans le cas d'un mouvement plan, dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, seul $\phi(t)$ aura une valeur non nulle.

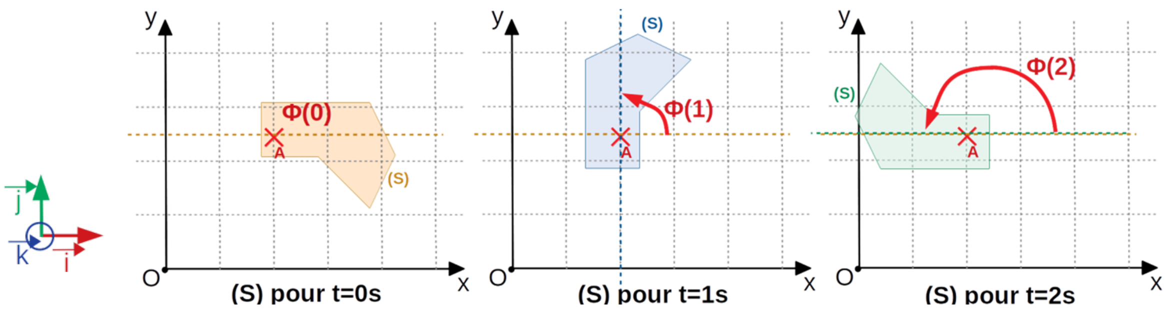
EXEMPLES

Soit la position angulaire d'un solide (S), autour de son axe de rotation (Az), qui est exprimée par le vecteur position angulaire $\overrightarrow{Pa(t)} = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}$.

On remarque déjà que la rotation n'aura lieu qu'au tour de l'axe z. On peut donc se limiter à calculer $\phi(t)$. Voici trois positions angulaires de (S) :

- pour t=0s, on a $\phi(0) = \frac{\pi}{2} \times 0 = 0rad$;
- pour t=1s, on a $\phi(1) = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}rad$;
- pour t=2s, on a$\phi(2) = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi rad$.

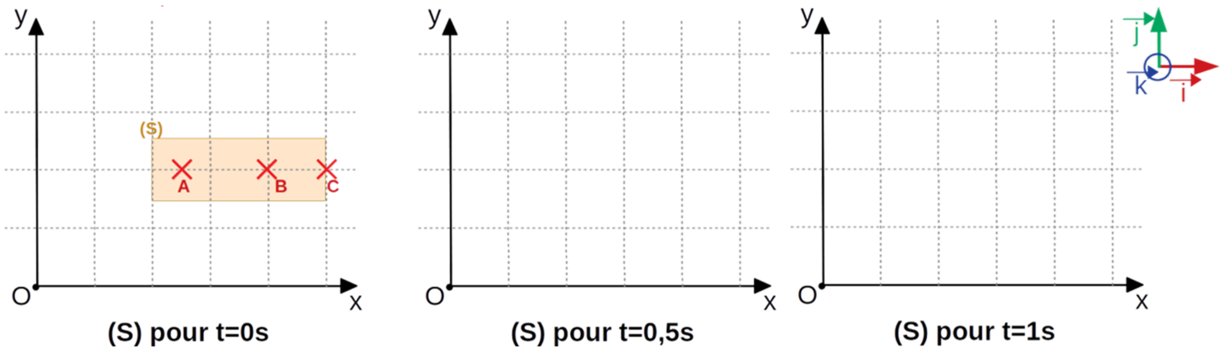
Ce qui donne graphiquement :



À VOUS DE JOUER 13

Soit un solide (S) en rotation d'axe $(A, \vec{\imath})$, dans le plan$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sa position angulaire autour de l'axe z vaut : $\phi(t) = \pi \times t$. Sa position initiale est indiquée sur le graphique de gauche :

1. Sur le graphique de t=1s, tracez les trajectoires de B et C.
2. Pour les graphiques de t=0,5s et t=1s, placez les points B et C, puis dessinez le solide (S).



3. Pour quelle valeur de t, le solide (S) reviendra dans sa position initiale ?

....

....

....

....

VITESSE ANGULAIRE

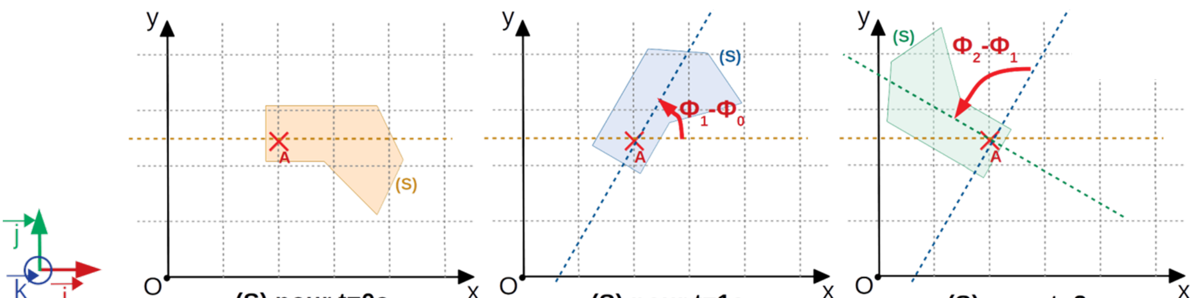
L'ESSENTIEL

Le mouvement d'un solide est caractérisé par sa vitesse angulaire. La vitesse angulaire permet de donner la variation de la position angulaire du solide, en fonction du temps. Elle s'exprime en $rad.s^{-1}$.

PREMIÈRE APPROCHE

EXEMPLES

Soit un solide (S), qui est en rotation autour du point A. Voici les positions occupées par (S) pour t=0s, t=1s et t=2s :



(S) pour t=0s (S) pour t=1s (S) pour t=2s

La vitesse angulaire du solide (S), à un instant donné, correspond à la différence de position angulaire entre deux instants, divisée par le temps entre ces deux instants. Par exemple :

- entre t=0s et t=1s, la vitesse angulaire de (S) est $\omega_0 = \frac{\phi_1-\phi_0}{t} = \frac{\frac{\pi}{3}-0}{1} = \frac{\pi}{3} rad.s^{-1}$.
- entre t=1s et t=2s, la vitesse angulaire de (S) est

$$\omega_1 = \frac{\phi_2-\phi_1}{t} = \frac{\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}}{1} = \frac{\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{6}}{1} = \frac{3\pi}{6} rad.s^{-1} = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}.$$

Dans cet exemple, on a $\omega_0 = \frac{\phi_1-\phi_0}{t1-t0}$ et $\omega_1 = \frac{\phi_2-\phi_1}{t2-t1}$.
Dans le cas général, qu'on va voir juste après, la vitesse angulaire, autour de l'axe z, est obtenue avec la formule suivante $\omega_z(t) = \lim\limits_{n\to 0} \frac{\phi(t+n)-\phi(t)}{(t+n)-t}$. Cela revient à dériver $\phi(t)$ par rapport au temps.

- **Vecteur vitesse angulaire**

L'ESSENTIEL

La position angulaire et la vitesse angulaire sont liées par la relation : $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{t}) = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{Pa}(\boldsymbol{t})}}{dt}$

Avec $\overrightarrow{\boldsymbol{Pa}(\boldsymbol{t})} = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}$ on obtient : $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_M(\boldsymbol{t})} = \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\psi(t)}{dt} \\ \frac{d\theta(t)}{dt} \\ \frac{d\phi(t)}{dt} \end{pmatrix}$

La lettre grecque utilisée pour représenter la vitesse angulaire est oméga. En majuscule pour la vitesse angulaire globale, et en minuscule pour les vitesses angulaires sur chaque axe. Dans le cas d'un mouvement plan, dans le plan$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, seule $\omega_z(t)$aura une valeur non nulle. On l'abrégera souvent $\omega(t)$.

EXEMPLES

Soit la position angulaire d'un solide (S), autour de son axe de rotation (Az), qui est exprimée par le vecteur position angulaire

$$\overrightarrow{Pa(t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2t\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

On remarque déjà que la rotation n'aura lieu qu'autour de l'axe z. On peut donc se limiter à calculer $\omega_z(t)$. $\omega_z(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \left(\frac{2t\pi}{3}\right)' = \frac{2\pi}{3} rad.s^{-1}$

Au final, on a : $\overrightarrow{\Omega_M(t)} = \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ ce qui signifie que la vitesse angulaire est constante : chaque seconde, le solide (S) tourne d'un angle de $\frac{2\pi}{3} rad$ autour de son axe de rotation.

- **Vitesse tangentielle**

La **vitesse tangentielle** représente la vitesse linéaire qu'aurait un point d'un solide, s'il était subitement extrait du solide et pouvait poursuivre son mouvement en ligne droite.

Le terme « tangentielle » vient du fait que la direction de la vitesse tangentielle est tangente à la trajectoire du mouvement.

L'ESSENTIEL

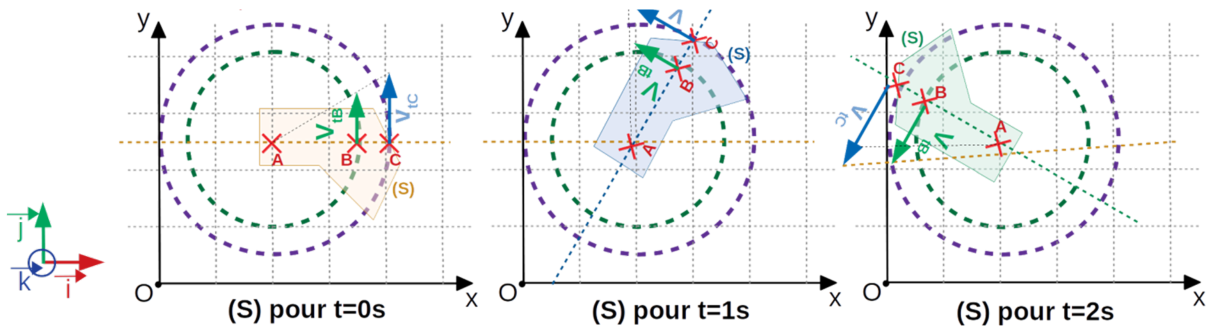
- La vitesse angulaire est la même pour tous les points d'un solide en rotation.

- La vitesse tangentielle d'un point en rotation vaut $V_t = \omega r$ avec :
  - V_t la vitesse tangentielle, en m.s^{-1}
  - ω la vitesse angulaire, en rad.s^{-1}
  - r la distance entre le point et le centre de rotation, en m

Plus un point est éloigné du centre de rotation, plus sa vitesse tangentielle est élevée. Les vitesses tangentielles des points d'un même solide sont même proportionnelles à l'éloignement des points, par rapport au centre de rotation du solide.

EXEMPLES

Soit un solide (S), qui est en rotation autour du point A. Voici les positions occupées par (S) pour t=0s, t=1s et t=2s :



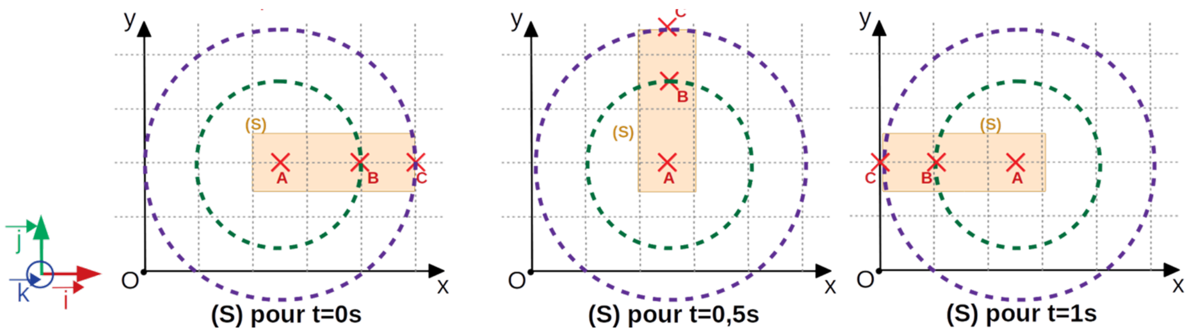
Les vitesses tangentielles des points B et C sont indiquées. Ces vitesses sont tangentes aux trajectoires des deux points, et elles sont proportionnelles à l'éloignement de leur point par rapport au centre de la rotation.

Si on sait que pour t=0s, $\omega_0 = \frac{\pi}{3} rad.s^{-1}$, que AB = 1,5cm et que AC=2cm, alors on peut calculer les vitesses tangentielles de B et C pour t=0s :

$$V_{tB}(0) = \omega \times AB = \frac{\pi}{3} \times 1{,}5 = \frac{1{,}5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57 m.s^{-1}$$
$$V_{tC}(0) = \omega \times AC = \frac{\pi}{3} \times 2 = \frac{1{,}5\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09 m.s^{-1}$$

À VOUS DE JOUER 14

Soit un solide (S) en rotation d'axe $(A, \vec{\imath})$, dans le plan$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sa position angulaire autour de l'axe z vaut : $\phi(t) = \pi \times t$. Voici trois graphes montrant les positions successives de (S) pour t=0s, t=0,5s et t=1s, ainsi que les trajectoires de deux points, B et C, appartenant à (S) :



1. Déterminez la vitesse angulaire du solide (S), qu'on notera simplement ω, autour de l'axe z.

---

2. D'après l'expression de ω, est-ce-que sa rotation se fait dans le sens trigonométrique ou anti-trigonométrique ? Justifiez.

---

3. Est-ce-que sa vitesse angulaire dépend de t ? Que cela implique-t-il ?

---

4. Déterminez les vitesses angulaires ω_B et ω_C, des points B et C, sachant que B se trouve à 15cm de A et que C se trouve à 10cm de B. Expliquez votre démarche.

---

5. Déterminez les vitesses tangentielles des points B et C.

....

....

....

6. Tracez les vitesses tangentielles de B et C sur chacun des trois graphes (échelle : 1 graduation du graphe = 0,471m.s^{-1}).
7. Que peut-on dire à propos des directions des vitesses tangentielles de B et C ?

....

ACCÉLÉRATION ANGULAIRE

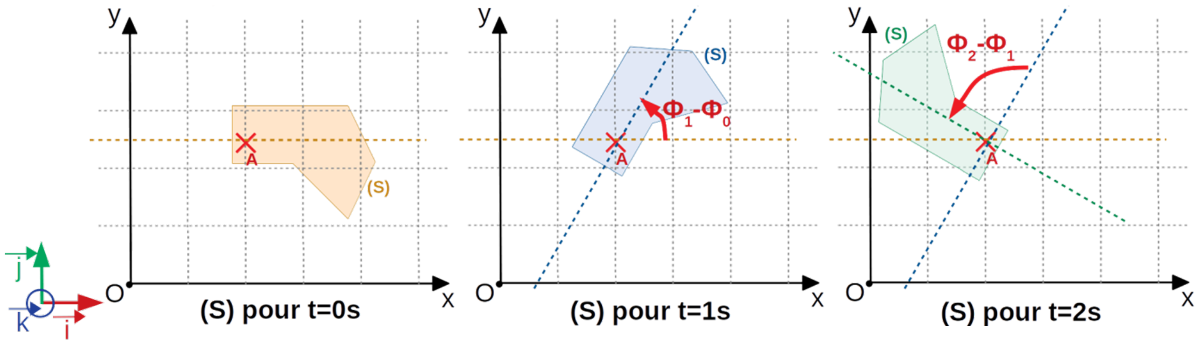
L'ESSENTIEL

Le mouvement d'un solide est caractérisé par son accélération angulaire. L'accélération angulaire permet de donner la variation de la vitesse angulaire du solide, en fonction du temps. Elle s'exprime en rad.s^{-2}.

PREMIÈRE APPROCHE

EXEMPLES

Soit un solide (S), qui est en rotation autour du point A. Voici les positions occupées par (S) pour t=0s, t=1s et t=2s :



On a déterminé que les vitesses angulaires du solide (S) valent :

- entre t=0s et t=1s $\omega_0 = \frac{\pi}{3} rad.s^{-1}$.
- entre t=1s et t=2s $\omega_1 = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}$.

On remarque que la vitesse angulaire a augmenté, car $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$. Cela signifie que la rotation accélère. L'accélération angulaire du solide (S), à un instant donné, correspond à la différence de vitesse angulaire entre deux instants, divisée par le temps entre ces deux instants. Par exemple, entre t=0s et t=1s, l'accélération angulaire de (S) est $\alpha_0 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}{1} = \frac{\frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}}{1} = \frac{\pi}{6} rad.s^{-2}$.

Dans cet exemple, on a $\alpha_0 = \frac{\omega_1-\omega_0}{t1-t0}$.
Dans le cas général, qu'on va voir juste après, l'accélération angulaire, autour de l'axe z, est obtenue avec la formule suivante $\alpha_z(t) = \lim\limits_{n \to 0} \frac{\omega_z(t+n)-\omega_z(t)}{(t+n)-t}$. Cela revient à dériver $\omega_z(t)$ par le temps.

- **Vecteur accélération angulaire**

À partir de l'expression du vecteur vitesse angulaire, on peut déterminer l'accélération angulaire d'un solide en fonction de t. Pour cela, il faut dériver le vecteur vitesse angulaire, par rapport au temps.

L'ESSENTIEL

- La vitesse angulaire et l'accélération angulaire sont liées par la relation : $\overrightarrow{\mathbf{A}}(t) = \frac{d\overrightarrow{\Omega(t)}}{dt}$

Avec, $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_M(t)}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega_x(t)} \\ \boldsymbol{\omega_y(t)} \\ \boldsymbol{\omega_z(t)} \end{pmatrix}$ on obtient :$\overrightarrow{\boldsymbol{A_M(t)}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_x(t)} \\ \boldsymbol{\alpha_y(t)} \\ \boldsymbol{\alpha_z(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\omega_x(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_y(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_z(t)}{dt} \end{pmatrix}$

La lettre grecque utilisée pour représenter l'accélération angulaire est alpha. En majuscule pour l'accélération angulaire globale, et en minuscule pour les accélérations angulaires sur chaque axe.

Dans le cas d'un mouvement plan, dans le plan$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, seule $\alpha_z(t)$ aura une valeur non nulle. On l'abrégera souvent $\alpha(t)$.

EXEMPLES

Soit la vitesse angulaire d'un solide (S) autour de son axe de rotation (Az), qui est exprimée par le vecteur position angulaire

$$\overrightarrow{\Omega_M(t)} = \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

On remarque déjà que la rotation n'aura lieu qu'autour de l'axe z. On peut donc se limiter à calculer

$$\alpha_z(t).\ \alpha_z(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \left(\frac{2\pi}{3}\right)' = 0rad.s^{-1}$$

Au final, on a : $\overrightarrow{\Omega_M(t)} = \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui signifie que l'accélération angulaire est nulle, et donc que la vitesse angulaire est constante.

L'ESSENTIEL

Si le vecteur accélération angulaire est nul, alors le vecteur vitesse angulaire devient constant au cours du temps, et le solide est en mouvement de rotation uniforme (MRU).

Si le vecteur accélération angulaire est constant, alors le solide est en mouvement de rotation uniformément variée (MRUV).

À VOUS DE JOUER 15

Soit un solide (S) en rotation d'axe $(O, \vec{\imath})$, dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sa position angulaire autour de l'axe z vaut :$\phi(t) = -4\pi \times t$.

1. Déterminez son accélération angulaire.

2. En déduire s'il s'agit d'un MRU ou d'un MRUV. Justifier.

3. Est-ce-que sa rotation se fait dans le sens trigonométrique ou anti-trigonométrique ? Justifiez.

À vous de jouer :

Soit un solide (S) en rotation dans le plan$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sa position angulaire autour de l'axe z vaut : $\phi(t) = 2\pi t^2 + 3t - 4$

4. Déterminez son accélération angulaire.

5. En déduire s'il s'agit d'un MRU ou d'un MRUV. Justifier.

CINÉMATIQUE
Composition des mouvements

TORSEUR CINÉMATIQUE

Un solide peut subir à la fois :

- une translation ;
- une rotation autour d'un point du solide.

Son mouvement est alors un **mouvement composé**, plus complexe que les mouvements élémentaires (translation et rotation). Ce mouvement peut être modélisé sous la forme de ce qu'on appelle un **torseur cinématique**.

L'ESSENTIEL

Le torseur cinématique d'un solide S, exprimé en un point A de ce solide, dans le référentiel muni d'un repère R, s'exprime sous la forme :

$$T(S/R)_A = \left\{\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \quad \overrightarrow{V_{S/R}}(A)\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_R \text{, avec :}$$

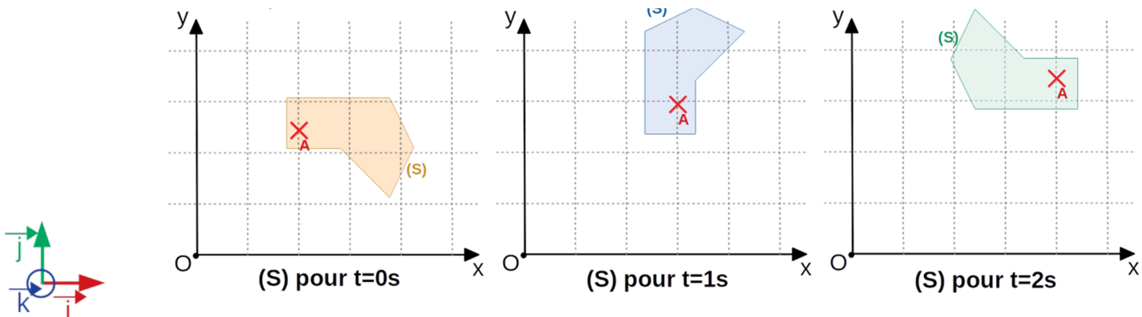
$\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ le vecteur vitesse angulaire du solide S ;
$\overrightarrow{V_{S/R}}(A)$ le vecteur vitesse linéaire d'un point A, appartenant au solide S.

Dans le cas d'un problème plan, on a : $T(S/R)_A = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_R$

Le point A fait partie du solide (S). Cela veut dire qu'il se déplace, en translation, en même temps que le solide (S).

EXEMPLES

Nous allons étudier un mouvement plan, dont la vitesse linéaire et la vitesse angulaire sont constantes (= elles ne dépendent pas du temps). Soit le solide (S), dont le mouvement est composé d'une translation et d'une rotation autour du point A :



En analysant les trois positions, on détermine que le vecteur vitesse linéaire du point A s'exprime $\overrightarrow{V_{S/R}(A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que le vecteur vitesse angulaire de (S) autour de A s'exprime $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ (un quart de tour par seconde). Le torseur cinématique de (S) s'exprime donc :

$$T(S/R)_A = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{Bmatrix}_R$$

MECAPI 2 – TORSEURS CINEMATIQUES

Sur **MecaPi**, rendez-vous dans l'onglet **Torseur Cinématique**.

À VOUS DE JOUER 16

Dans l'exercice suivant, vous exprimerez les torseurs cinématiques ainsi :

- toutes les composantes non-nulles du mouvement seront notées par le nom de leur fonction, sans indiquer l'expression de la fonction
- toutes les composantes nulles du mouvement seront notées 0

Par exemple, le torseur $\begin{matrix}\square\\ \square\\ \square_A\end{matrix}\left\{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{matrix}\right\}_R$ sera noté $\begin{matrix}\square\\ \square\\ \square_A\end{matrix}\left\{\begin{matrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{matrix}\right\}_R$

1. Pour chacune des animations, exprimez le torseur cinématique du solide (S) en son point M.

COMPOSITION DES VITESSES EN TRANSLATION

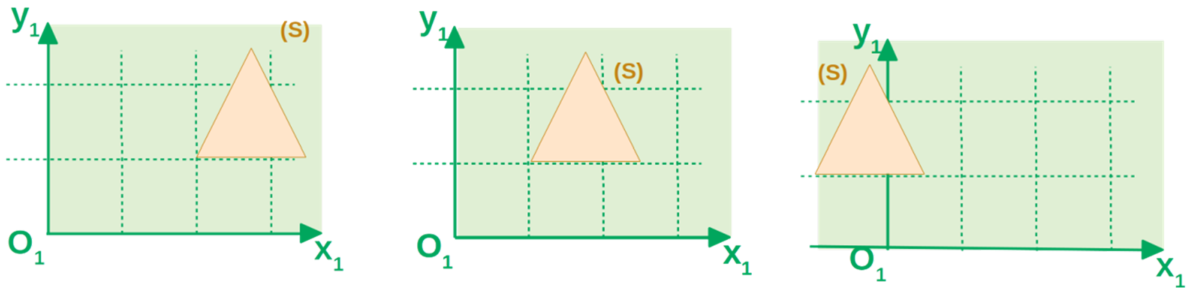
L'ESSENTIEL

Soit un solide (S) en translation par rapport à un référentiel R1, selon un vecteur vitesse linéaire $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{S/R1}}}$. Le référentiel R1 est lui-même en translation par rapport à un référentiel R0, selon un vecteur vitesse linéaire $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{R1/R0}}}$. Alors, le vecteur vitesse linéaire $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{S/R0}}}$ du solide (S) par rapport au référentiel R0 vaut $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{S/R0}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V_{S/R1}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{V_{R1/R0}}}$

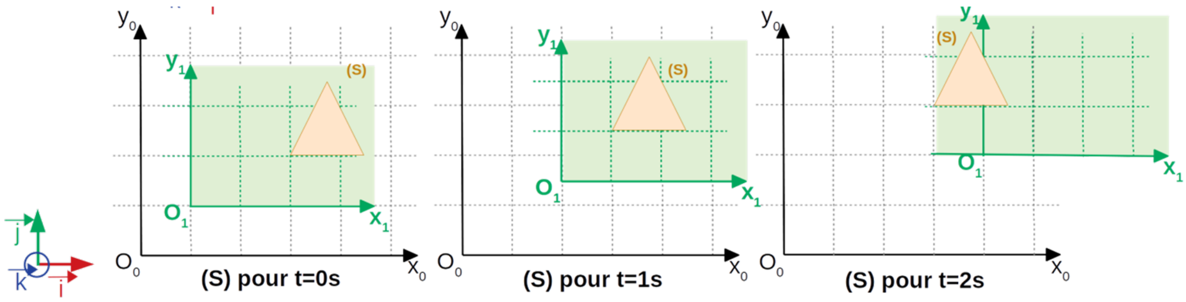
EXEMPLES

Prenons un solide (S), qui se déplace par rapport à un référentiel R1, muni d'un repère (O1x1y1z1). Le vecteur vitesse linéaire de (S), par rapport à R1, muni d'un repère (O1x1y1z1), vaut :

$\overrightarrow{V_{S/R1}(A)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui nous donne le mouvement suivant pour t=0s, t=1s et t=2s :



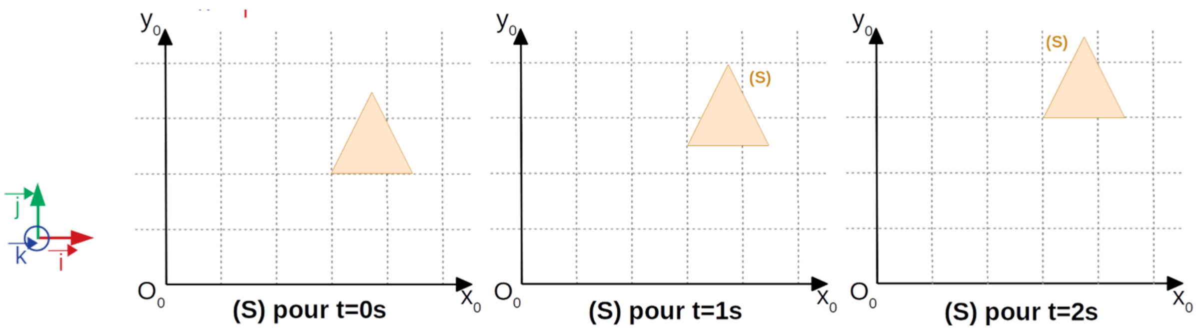
Si, en plus, on sait que le référentiel R1 se déplace par rapport à un référentiel R0, selon un vecteur vitesse linéaire $\overrightarrow{V_{R1/R0}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors on peut représenter graphiquement le mouvement de (S) dans R0 :



On peut aussi calculer le vecteur vitesse de (S) par rapport à R0 :

$$\overrightarrow{V_{S/R0}} = \overrightarrow{V_{S/R1}} + \overrightarrow{V_{R1/R0}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 0+0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on reproduit les graphiques précédents, sans le repère du référentiel R1, on se rend bien compte que le vecteur vitesse obtenue est cohérent :



À VOUS DE JOUER 17

Soit un référentiel R1, en translation rectiligne uniforme $\overrightarrow{V_{R1/R0}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par rapport à un référentiel R0.

Soit un solide (S), en translation rectiligne uniforme $\overrightarrow{V_{S/R1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par rapport à un référentiel R1.

1. Exprimez le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{S/R0}}$

....

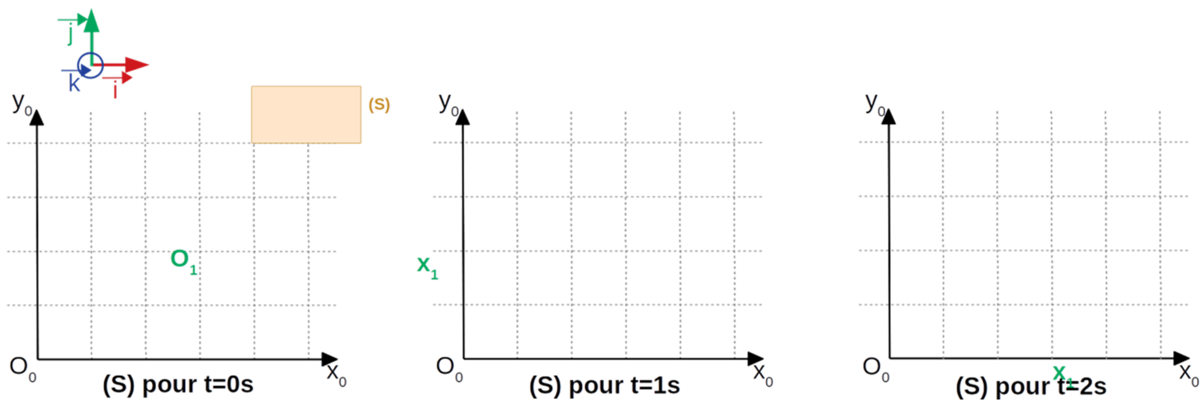
....

....

....

....

2. Dans le graphique ci-dessous, placez les positons, pour t=1s et t=2s, de O1, le point d'origine du repère associé au référentiel R1 :
3. Dans le graphique, placez les positions du solide (S), pour t=1s et t=2s.



4. De quel type est le mouvement de (S) dans R0 ?

....

....

....

....

....

....

....

LE TEMPS DU BILAN

- En cinématique, on étudie les mouvements d'un solide dans un référentiel comportant trois dimensions spatiales et une dimension temporelle.
- Le référentiel est muni d'un repère, comportant un point d'origine, trois axes, et une base.
- L'ensemble des positions occupées par un point du solide S, au cours du temps, forme la trajectoire du point.
- Certains mouvements se font uniquement dans deux dimensions, c'est-à-dire dans un plan : on parle alors de mouvement plan. Les mouvements élémentaires sont des mouvements plans.

- La translation est l'un des deux mouvements élémentaires. Lors d'un mouvement de translation, tous les points du solide (S) se déplacent en suivant des trajectoires qui sont parallèles les unes par rapport aux autres.
- Une translation peut être rectiligne, circulaire, curviligne ou quelconque.
- La rotation est le second mouvement élémentaire. Lors d'un mouvement de rotation, tous les points du solide (S) se déplacent en suivant des cercles. Ces cercles sont tous centrés autour d'un même point A. Ce point A est le centre de la rotation.
- Lorsqu'un solide est en translation, alors :
  - tous ses points, à un instant t, possèdent le même vecteur vitesse
  - tous ses points, à un instant t, possèdent le même vecteur accélération.
- Dans un mouvement de translation, si le vecteur accélération linéaire est nul, alors le mouvement est une translation uniforme (MTU).
- Dans un mouvement de translation, si le vecteur accélération linéaire est constant, alors le mouvement est une translation uniformément variée (MTUV).

- Les mouvements de rotation, et de translation circulaire se font autour d'un axe de rotation, qui peut se définir comme la droite, qui, à la fois :
  - est perpendiculaire au plan du mouvement ;
  - passe par le centre des mouvements.
- Lorsqu'un solide est en rotation, alors tous ses points, à un instant t, possèdent des vecteurs vitesses dont les valeurs sont proportionnelles à leur distance par rapport au centre de la rotation.
- La vitesse angulaire est la même pour tous les points d'un solide en rotation.
- La vitesse tangentielle d'un point en rotation vaut $\boldsymbol{V_t} = \boldsymbol{\omega r}$ avec :
  - $\boldsymbol{V_t}$ la vitesse tangentielle, en m.s^{-1}
  - $\boldsymbol{\omega}$ la vitesse angulaire, en rad.s^{-1}
  - $\boldsymbol{r}$ la distance entre le point et le centre de rotation, en m
- L'accélération angulaire est la même pour tous les points d'un solide en rotation.
- Si le vecteur accélération angulaire est nul, alors le vecteur vitesse angulaire devient constant au cours du temps, et le solide est en mouvement de rotation uniforme (MRU).
- Si le vecteur accélération angulaire est constant, alors le solide est en mouvement de rotation uniformément variée (MRUV).

- Soit M, un point appartenant au solide (S). Sa position dans le repère $\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}\right)$ peut être modélisée par un vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, qu'on appelle vecteur position de M. La position s'exprime en m.
- La position d'un point peut aussi être exprimée, avec des fonctions de t. On la notera alors $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}(\boldsymbol{t})} = \left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\right)$ ou, pour une meilleure lisibilité, $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}(\boldsymbol{t})} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix}$

- Le mouvement d'un point d'un solide, est caractérisé par sa vitesse linéaire. La vitesse linéaire permet de donner la variation de la position du solide, en fonction du temps. Elle s'exprime en m.s^{-1}.
- Soit M, un point appartenant au solide (S). Sa vitesse linéaire dans le repère $\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}\right)$ peut être modélisée par un vecteur $\vec{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{Vx}, \boldsymbol{Vy}, \boldsymbol{Vz})$, qu'on appelle vecteur vitesse linéaire de M.

LE TEMPS DU BILAN

- En cinématique, on étudie les mouvements d'un solide dans un référentiel comportant trois dimensions spatiales et une dimension temporelle.
- La position et la vitesse linéaire sont liées par la relation : $\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}$

Avec $\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, on obtient : $\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \\ V_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}$

- La vitesse est toujours tangente à la trajectoire du point.
- La norme de la vitesse linéaire se calcule avec la relation suivante :

$$V = \|\vec{V}(t)\| = \sqrt{\left(V_x(t)^2 + V_y(t)^2 + V_z(t)^2\right)}$$

- Le mouvement d'un solide, ou d'un point d'un solide, est caractérisé par son accélération linéaire. L'accélération linéaire permet la variation de la vitesse linéaire du solide, en fonction du temps. Elle s'exprime en m.s^{-2}
- Soit M, un point appartenant au solide (S). Son accélération linéaire dans le repère $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ peut-être modélisée par un vecteur $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, qu'on appelle vecteur accélération linéaire de M.
- La vitesse et l'accélération linéaires sont liées par la relation : $\vec{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{V(t)}}{dt}$

Avec $\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \\ V_z(t) \end{pmatrix}$, on obtient : $\overrightarrow{a_M(t)} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dV_x(t)}{dt} \\ \frac{dV_y(t)}{dt} \\ \frac{dV_z(t)}{dt} \end{pmatrix}$

- La position angulaire, ou angle, d'un solide en rotation, représente l'angle suivant lequel le solide est orienté par rapport à son axe de rotation. Elle s'exprime en rad.
- La position angulaire peut être donnée sous la forme d'un triplet de fonctions de t. On la notera alors $\overrightarrow{Pa(t)} = (\psi(t), \theta(t), \phi(t))$ ou, pour une meilleure lisibilité, $\overrightarrow{Pa(t)} = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}$, avec :
  - $\psi(t)$ l'angle du solide autour de l'axe x.
  - $\theta(t)$ l'angle du solide autour de l'axe y.
  - $\phi(t)$ l'angle du solide autour de l'axe z.

- Le mouvement d'un solide est caractérisé par sa vitesse angulaire. La vitesse angulaire permet de donner la variation de la position angulaire du solide, en fonction du temps. Elle s'exprime en rad.s^{-1}.
- La position angulaire et la vitesse angulaire sont liées par la relation : $\vec{\Omega}(t) = \frac{d\overrightarrow{Pa(t)}}{dt}$

Avec, $\overrightarrow{Pa(t)} = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}$ on obtient : $\overrightarrow{\Omega_M(t)} = \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\psi(t)}{dt} \\ \frac{d\theta(t)}{dt} \\ \frac{d\phi(t)}{dt} \end{pmatrix}$

- Le mouvement d'un solide est caractérisé par son accélération angulaire. L'accélération angulaire permet de donner la variation de la vitesse angulaire du solide, en fonction du temps. Elle s'exprime en rad.s^{-2}.
- La vitesse angulaire et l'accélération angulaire sont liées par la relation : $\vec{A}(t) = \frac{d\overrightarrow{\Omega(t)}}{dt}$

Avec, $\overrightarrow{\Omega_M(t)} = \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix}$ on obtient : $\overrightarrow{\%_M(t)} = \begin{pmatrix} \alpha_x(t) \\ \alpha_y(t) \\ \alpha_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\omega_x(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_y(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_z(t)}{dt} \end{pmatrix}$

- Le torseur cinématique d'un solide S, exprimé en un point A de ce solide, dans le référentiel muni d'un repère R, s'exprime sous la forme :

$$\boldsymbol{T(S/R)_A} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{S/R}}} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{V_{S/R}}}(\boldsymbol{A})\right\} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\omega_x} & \boldsymbol{V_x} \\ \boldsymbol{\omega_y} & \boldsymbol{V_y} \\ \boldsymbol{\omega_z} & \boldsymbol{V_z} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{R}}$$, avec :

  - $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{S/R}}}$ le vecteur vitesse angulaire du solide S ;
  - $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{S/R}}}(\boldsymbol{A})$ le vecteur vitesse linéaire d'un point A, appartenant au solide S.
- Soit un solide (S) en translation par rapport à un référentiel R1, selon un vecteur vitesse linéaire $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{S/R1}}}$. Le référentiel R1 est lui-même en translation par rapport à un référentiel R0, selon un vecteur vitesse linéaire $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{R1/R0}}}$. Alors, le vecteur vitesse linéaire $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{S/R0}}}$ du solide (S) par rapport au référentiel R0 vaut $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{S/R0}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V_{S/R1}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{V_{R1/R0}}}$

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1